БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пособие
(методические указания по решению типовых задач
и задания для самостоятельной и индивидуальной работы)
для студентов 2 курса экономических специальностей

Гомель 2005

УДК 51
ББК 22.11
В 93

Авторы-составители: Л. А. Воробей, канд. физ.-мат. наук,
ст. преподаватель;
Е. М. Миронович, ассистент

Рецензенты: Н. Г. Кохан, канд. физ.-мат. наук,
доцент, зав. кафедрой общенаучных дисциплин
ГФ УО ФПБ «Международный институт трудовых
и социальных отношений»;
Т. Ф. Калмыкова, канд. техн. наук, доцент
кафедры высшей математики Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
Протокол № 2 от 14 декабря 2004 г.

В 93 **Высшая** математика. Теория вероятностей : пособие (методические указания по решению типовых задач и задания для самостоятельной и индивидуальной работы) для студентов 2 курса экономических специальностей / авт.-сост. : Л. А. Воробей, Е. М. Миронович. – Гомель: УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2005. – 116 с.
ISBN 985-461-148-5

УДК 51
ББК 22.11

ISBN 985-461-148-5

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Знание математики необходимо студентам экономических вузов при изучении фундаментальных и специальных экономических дисциплин. Теория вероятностей и математическая статистика позволяют освоить методы изучения, обобщения и прогнозирования экономической информации.

Одной из основных форм обучения студентов является их самостоятельная работа над учебным материалом. Она складывается из работы над конспектом лекций, чтения учебников, решения задач, выполнения контрольных заданий и расчетно-графических работ.

Данное издание адресовано студентам первого курса сокращенной формы обучения и второго курса, которые в соответствии с программой курса «Высшая математика» выполняют расчетно-графическую работу по теории вероятностей. Кроме того, пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий, контрольных работ, зачетов и других видов занятий со студентами.

В издании приводятся программа курса «Теория вероятностей», основные теоретические сведения, необходимые для решения задач, и примеры решения типовых задач. Также предлагаются индивидуальные задания.

Студент выполняет работу по варианту, номер которого соответствует номеру его фамилии в журнале посещаемости. Замена варианта без согласования с кафедрой не разрешается. Работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета кроме красного. Для замечаний рецензента необходимо оставить поля шириной 4–5 сантиметров. Условие каждой задачи следует записывать полностью. При получении положительной рецензии студент защищает свою работу у преподавателя.

Список рекомендуемой литературы включает наименование основных литературных источников, которые необходимо использовать при изучении курса и написании расчетно-графической работы.

ПРОГРАММА КУРСА

1. Случайные события и вероятность

Случайные события и соотношения между ними. Частота и вероятность. Геометрическая вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления события. Формула полной вероятности. Формула Бейеса. Элементы теории нечетких множеств. Понятие инциденции, нечеткой матрицы, матрицы инциденций. Примеры использования матриц инциденций при исследовании скрытых воздействий в финансовой и производственной областях.

2. Случайные величины и законы их распределения

Случайные величины и законы их распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Мода и медиана. Равномерное распределение. Биномиальный закон распределения. Закон Пуассона. Показательное распределение. Функция надежности.

3. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения. Функция Лапласа. Моменты, асимметрия и эксцесс случайной величины. Закон больших чисел и его частные случаи. Усиленный закон больших чисел. Теорема Колмогорова. Предельные теоремы. Центральная предельная теорема. Определение характеристик и нахождение законов распределения случайных величин на основе опытных данных.

1. СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Классификация событий

Испытание – осуществление определенной совокупности условий.

Событие – результат испытания. Обозначается большими буквами латинского алфавита (A, B, C и т. д.).

Исходы испытаний – события, каждое из которых может произойти в результате испытания.

Исход, благоприятствующий событию – исход, появление которого влечет за собой появление события.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет при данном испытании и обозначается латинской буквой E.

Невозможным называется событие, которое не произойдет при данном испытании и обозначается латинской буквой U.

Случайным называется событие, которое может как произойти, так и не произойти при данном испытании.

Совместные события – это события, для которых наступление одного из них сопровождается наступлением других в данном испытании.

Несовместные события – события, для которых появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Если при реализации совокупности условий, когда происходит событие A, происходит и событие B, то говорят, что A влечет за собой (благоприятствует) B и обозначают этот факт: $A \subset B$. Если имеет место одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называются *равносильными.*

Равновозможные события – это события, для которых ни одно не является более возможным, чем другие в данном испытании.

Единственно возможные события – это события, для которых появление одного и только одного из них в данном испытании является достоверным событием.

Противоположные события – это два единственно возможных несовместных события. Событие, противоположное A, обозначают через $\overline{A}$. Появление одного из событий равносильно непоявлению другого (например, противоположные события «герб» и «цифра» при одном подбрасывании монеты).

События A_1, A_2,…, A_n называют *полной группой событий*, если они попарно-несовместны. Появление одного и только одного из них является достоверным событием.

События, образующие полную группу событий и являющиеся несовместными и равновозможными, называются *случаями* или *шансами.*

Элементарное событие или *элементарный исход испытания* – событие, которое нельзя представить в виде совокупности других исходов этого испытания.

Составное событие или *составной исход испытания* – событие, которое можно представить в виде совокупности элементарных событий (всех или части) этого испытания.

1.2. Классическое определение вероятности

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных исходов опыта, в котором может появиться это событие. Вероятность события A обозначается через $P(A)$ и рассчитывается по формуле

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1}$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;
n – число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий.

Вероятность события $P(A)$ – численная мера, характеризующая степень возможности появления события A в данном испытании.

Вероятность достоверного события равна единице. Вероятность невозможного события равна нулю. Вероятность случайного события больше нуля и меньше единицы.

Вероятность любого события B удовлетворяет неравенствам:

$$0 \le P(B) \le 1. \tag{2}$$

Пример 1.1. В урне 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется голубым?

Решение. Обозначим событие «извлеченный шар окажется голубым» через A. Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 6 благоприятствуют событию A.

Вероятность события A рассчитывается по формуле (1) и будет равна

$$P(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6 .$$

Пример 1.2. Найти вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы.

Решение. Обозначим событие «число с одинаковыми цифрами» через A. Двузначными числами являются числа от 10 до 99. Всего таких чисел 90. Одинаковые цифры имеют 9 чисел (это числа 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99). Так как в данном случае $m = 9$, $n = 90$, вероятность совпадения чисел будет равна

$$P(A) = \frac{9}{90} = 0{,}1 .$$

Числа m и n находят путем прямого перечисления элементарных исходов испытания. Однако, при большом числе элементарных исходов их перечисление весьма громоздко. Поэтому при подсчете числа элементарных исходов используют элементы комбинаторики.

Соединениями называют различные группы, составленные из каких-либо объектов, элементов. Различают три вида соединений: перестановки, размещения и сочетания.

Перестановками из n элементов называют соединения, содержащие все n элементов и отличающиеся между собой лишь порядком элементов. Число перестановок из n элементов находится по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \ \ (0! = 1) . \qquad (3)$$

Например, $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Размещениями из n элементов по k в каждом $(n \geq k)$ называют такие соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k находят по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} . \qquad (4)$$

Например, $A_5^3 = \dfrac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Сочетаниями из n элементов по k $(n \geq k)$ называют соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга, по крайней мере, одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k находят по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k} \tag{5}$$

или

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}. \tag{6}$$

Например, $C_5^3 = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

При вычислениях можно использовать следующее свойство сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{7}$$

Число различных перестановок из n элементов, среди которых k_1 первого вида, k_2 – второго, …, k_m – m-го вида, определяется по следующей формуле:

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}. \tag{8}$$

Число различных размещений по k элементов из n различных элементов, в которых каждый элемент может использоваться любое от 0 до k число раз исчисляется следующим образом:

$$\overleftarrow{A_n^k} = n^k. \tag{9}$$

Число различных сочетаний по k элементов из n различных элементов, в которых каждый элемент может повторяться любое от 0 до k числа раз равно

$$f_n^k = C_{n+k-1}^k. \tag{10}$$

Пример 1.3. В студенческой группе, состоящей из 30 человек, нужно избрать актив группы (старосту, заместителя и профорга). Определите, сколькими способами это можно сделать.

Решение. Из множества 30 собравшихся человек нас интересуют размещения из 30 по 3. Используя формулу (4) получим: $A_{30}^{3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$ – столькими способами собрание может выбрать актив группы.

Пример 1.4. Рассчитать, сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек.

Решение. Согласно формуле (3) при n = 5 находим: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \times$
$\times 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Пример 1.5. Собранию из 30 человек надо выбрать 3 делегата на конференцию. Определите, сколькими способами это можно сделать.

Решение. Из множества в 30 человек надо выбрать подмножество в 3 человека. Для этого следует использовать формулу (6):

$$C_{30}^{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060 \text{ способами.}$$

Пример 1.6. Из 15 билетов наудачу берется один. Какова вероятность того, что номер билета есть число, не делящееся ни на 3, ни на 5?

Решение. Обозначим через A событие «номер взятого билета не делится ни на 3, ни на 5». Всего элементарных исходов n = 15. Событию A благоприятствуют исходы 1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14 (m = 8). Используя формулу (1) получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{15}.$$

Пример 1.7. Бросили две игральные кости и подсчитали сумму выпавших очков. Какова вероятность получить сумму, равную семи?

Решение. Событию A (сумма выпавших очков равна 7) благоприятствует следующих m = 6 исходов: (1;6), (2;5), (3;4), (5;2), (6;1).

Общее число исходов равно n = 36 (каждое из шести очков одной кости может выпасть в паре с любым из шести очков другой кости, следовательно, всех пар $n = 6 \cdot 6 = 36$).

Используя формулу (1) получим:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Пример 1.8. Наудачу взятый телефонный номер состоит из пяти цифр. Какова вероятность того, что в нем: 1) все цифры различны; 2) все цифры нечетны?

Решение.

1. Так как на каждом из пяти мест в пятизначном номере может стоять любая из цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то всех пятизначных чисел будет 10^5. Номера, у которых все цифры различные, это размещения из 10 элементов по 5. Поэтому число благоприятствующих случаев равно A_{10}^5. Согласно формуле (1) искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{A_{10}^5}{10^5}.$$

2. Из пяти нечетных цифр (1, 3, 5, 7, 9) можно образовать 5^5 различных пятизначных номеров. Так как всех равновозможных случаев 10^5, то искомая вероятность будет равна:

$$P(A) = \frac{5^5}{10^5}.$$

Пример 1.9. На пяти одинаковых карточках написаны буквы «л», «м», «о», «о», «т». Какова вероятность того, что:

1) извлекая все карточки по одной наугад, получим в порядке их выхода слово «молот»;

2) извлекая три карточки по одной наугад, получим в порядке выхода слово «том»?

Решение.

1. Пронумеруем буквы в том порядке, в котором они написаны:

л	м	о	о	т
1	2	3	4	5

Из пяти различных букв можно составить 120 перестановок ($P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$), значит общее число равновозможных исходов равно $n = 120$. Событие A (получится слово «молот») произойдет, если карточки будут взяты в следующем порядке:

2	3	1	4	5	или	2	4	1	3	5
м	о	л	о	т		м	о	л	о	т

Благоприятствующих исходов событию A $m = 2$, следовательно искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}.$$

2. Общее число исходов равно 60 ($n = A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$). Слово «том» появится, если карточки будут взяты в следующем порядке:

5	3	2	или	5	4	2
т	о	м		т	о	м

Благоприятствующих исходов событию B (получено слово «том») будет два, т. е. $m = 2$. Следовательно, вероятность события B равна

$$P(B) = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}.$$

Пример 1.10. Из колоды в 36 карт наугад вынимаются 3 карты. Какова вероятность того, что среди них окажутся два туза?

Решение. Обозначим событие «среди трех карт два туза» через A. Общее число возможных исходов $n = C_{36}^3$. Определим число исходов, благоприятствующих событию A.

Два туза из четырех можно взять C_4^2 способами, еще одну любую карту можно взять C_{32}^1 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $m = C_4^2 \cdot C_{32}^1$ и вероятность события A составит

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{32!}{31!} \cdot \frac{3!\cdot 33!}{36!} = \frac{16}{35 \cdot 17} \approx 0{,}0269.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Из партии товаров, в которой 31 изделие без дефекта, а 6 – с дефектами, товаровед наудачу берет 3 изделия. Чему равна вероятность следующих событий:

1) все 3 изделия без дефекта;

2) по крайней мере, одно изделие без дефекта?

Ответ: 1) $P(A) = 0{,}579$; 2) $P(B) = 0{,}9973$.

2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что:

1) выпадет сумма очков, равная 8-ми;

2) выпадет сумма очков, не превышающая 8-ми;

3) выпадет сумма очков, большая 8-ми;

4) ни на одной из игральных костей не выпадет число очков равное 6-ти;

5) хотя бы на одной из игральных костей выпадет число очков равное 6-ти;

6) хотя бы на одной из игральных костей выпадет четное число очков;

7) на обеих костях выпадет одинаковое число очков;

8) на обеих костях выпадет четное число очков;

9) выпадет произведение очков, равное 8-ми;

10) сумма выпавших очков больше, чем их произведение?

Ответ: 1) 0,139; 2) 0,689; 3) 0,311; 4) 0,694; 5) 0,306; 6) 0,583; 7) 0,167; 8) 0,25; 9) 0,055; 10) 0,274.

3. Товаровед осматривает партию игрушек, в которой из 20 штук 2 бракованных. Какова вероятность того, что:

1) одна наугад взятая игрушка бракованная;

2) из трех наугад одновременно взятых игрушек: а) только одна бракованная; б) не более одной бракованной?

Ответ: 1) 0,1; 2 а) 0,27; 2 б) 0,98.

4. Из букв слова «ротор», составленного с помощью разной азбуки, наудачу последовательно извлекаются 3 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «тор»?

Ответ: 0,067.

5. На шести одинаковых карточках написаны буквы «а», «в», «к», «м», «о», «с». Какова вероятность того, что извлекая все карточки по одной наугад, получим слово «Москва?

Ответ: $\dfrac{1}{720}$.

6. В книжной лотерее разыгрываются 20 билетов, из которых 2 выигрышных. Какова вероятность того, что из трех купленных билетов хотя бы на один выпал выигрыш?

Ответ: $\frac{27}{95}$.

7. Для проверки магазинов нужно 3 ревизора, каждый из которых должен проверить два магазина. Чему равна вероятность того, что при случайном распределении объектов первому ревизору попадут данные 2 магазина?

Ответ: 0,0667.

8. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран, найти вероятность того, что в делегацию войдут две женщины и один мужчина.

Ответ: $P(A) = 0{,}087$.

1.3. Статистическое определение вероятности

На практике часто классическое определение вероятности неприменимо, так как оно предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно, а результат испытания можно представить в виде совокупности элементарных, равновозможных исходов. Поэтому используют статистическое определение вероятности.

Относительная частота $W(A)$ события A есть отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n}, \tag{11}$$

где n – общее число произведенных испытаний;

m – число появлений события A.

Пример 1.11. Частота нормального всхода семян равна 0,97. Из высеянных семян взошло 970. Рассчитать, сколько семян было высеяно.

Решение. Из формулы (11) $n = \dfrac{m}{W}$. Так как m = 970, W = 0,97, то $n = \dfrac{970}{0{,}97} = 1000$. Следовательно, было высеяно 1000 семян.

Пример 1.12. В партии из 1000 изделий товаровед обнаружил 15 бракованных. Определить, чему равна относительная частота появления брака.

Решение. Так как m = 15, n = 1000, то $W(A) = \dfrac{15}{1000} = 0{,}015$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Установлено, что в течение 15 дней процент выполнения плана магазином составлял: 110, 113, 110, 115, 109, 114, 110, 112, 115, 109, 112, 113, 111, 114, 113. Определить относительную частоту дней, в которые план выполняется не менее, чем на 112 %.

Ответ: $\dfrac{3}{5}$.

2. При стрельбе по мишени относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,75. Найти число попаданий, если всего произвели 100 выстрелов.

Ответ: 75.

1.4. Геометрическое определение вероятности

Пусть каждый элементарный исход испытания можно рассматривать как попадание в точку некоторой области меры S. Событие A – попадание в точку области S_A. Вероятность события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{S_A}{S}. \qquad (12)$$

Пример 1.13. Капсула с космонавтами должна приземлиться в круг радиусом 2 км. Вероятность приземления в любое место круга одинаковая. Определить, какова вероятность приземления космонавтов:

1) от центра круга на расстоянии меньше 1 км;

2) в заданном секторе, составляющем 0,1 площади этого круга.

Решение. Область C_1 – круг радиусом 2 км. Площадь этого круга $S = 4\pi$. Область C_2 – круг радиусом 1 км и площадью $S_1 = \pi$.

Событие A – приземление в область C_2. Следовательно, вероятность приземления капсулы в круг радиусом 2 км равна:

$$P(A) = \frac{S_1}{S} = \frac{\pi}{4\pi} = 0{,}25\,.$$

Событие B – приземление в сектор, площадь которого $S_2 = 0{,}1S$. Поэтому $P(B) = \frac{S_2}{S} = \frac{0{,}1S}{S} = 0{,}1$.

Пример 1.14. Велосипедист прибудет в город C обязательно в течение суток. Вероятность прибытия в любой момент одинакова. Найти вероятность того, что он прибудет в течение данного часа.

Решение. Обозначим событие «велосипедист прибудет в город в течение данного часа» через A. Областью S является промежуток 24 часа, а $S_A = 1$ час. Поэтому $P(A) = \frac{1}{24}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В круг вписан квадрат. В круг наудачу поставлена точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет в квадрат?

Ответ: $P = 0{,}636$.

2. Стержень длиной $l = 100$ см ломается на три части. Какова вероятность того, что каждая часть будет не меньше 20 см?

Ответ: 0,6.

1.5. Действия над событиями

Суммой (объединением) нескольких событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий:

$$C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n\,. \tag{13}$$

Произведением (пересечением) нескольких событий A_1, A_2, ..., A_n называется событие C, состоящее в совместном появлении всех этих событий:

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\,. \tag{14}$$

Сложение и умножение вероятностей. Теоремы сложения вероятностей

Вероятность суммы n несовместных событий A_1, A_2, ..., A_n равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{15}$$

Сумма вероятностей A_1, A_2, ..., A_n, *образующих полную группу*, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \tag{16}$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{17}$$

Если обозначить $P(A) = p$, а $P(\overline{A}) = q$, тогда

$$p + q = 1. \tag{18}$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{19}$$

Вероятность суммы трех совместных событий равна:

$$\begin{gathered} P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC). \end{gathered} \tag{20}$$

При использовании формул сложения вероятностей совместных событий следует иметь в виду, что события $A_k\,(k = \overline{1,n})$ могут быть как независимы, так и зависимы.

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного из событий не зависит от того, появилось или не появилось другое событие. События A_1, A_2, ..., A_n называются *независимыми в совокупности* или *независимыми*, если они попарно-независимы, а также независимы каждое из них и любая комбинация, составленная из остальных (части или всех) событий.

Пусть события A_1, A_2, ..., A_n – независимы в совокупности, причем $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, …, $P(A_n) = p_n$ и в результате испытания могут наступить все события либо часть из них, либо одно из них, тогда вероятность появления хотя бы одного из них определяется по формуле:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) = \\ = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n, \quad (21)$$

где $P(\overline{A_k}) = 1 - P(A_k) = q_k$.

Если все события имеют одинаковую вероятность, равную p, то

$$P(A) = 1 - q^n, \quad (22)$$

где $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

Теоремы умножения вероятностей

Если события A_1, A_2, ..., A_n независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \quad (23)$$

Два события называются *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от наступления либо ненаступления другого события.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Вероятность произведения зависимых событий

Вероятность произведения зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило, т. е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (24)$$

Формула умножения вероятностей может быть распространена на любое число m зависимых событий A_1, A_2, ..., A_m:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \times$$
$$\times P_{A_1A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1A_2\ldots A_{m-1}}(A_m), \qquad (25)$$

Причем вероятность последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие произошли.

Пример 1.15. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июле равно 6. Какова вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода?

Решение. Введем обозначения событий: A – «первого июля будет ясная погода»; B – «второго июля будет ясная погода»; A и B – события зависимы, AB – «первого и второго июля будет ясная погода».

Вероятность того, что первого июля будет ясная погода, равна $P(A) = \frac{25}{31}$. Вероятность того, что второго июля будет ясная погода, при условии, что первого июля была ясная погода, равна $P_A(B) = \frac{24}{30}$. Тогда искомая вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода, по теореме умножения вероятностей зависимых событий, равна $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{20}{31}$.

Пример 1.16. Найти вероятность того, что наудачу написанная простая дробь сократится на 2.

Решение. Обозначим A – событие, заключающееся в том, что «дробь сократится на 2»; B – событие «числитель дроби делится на 2»; C – «знаменатель дроби делится на 2».

Так как каждое второе число делится на 2, то $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

B и C – независимые события.

$A = B \cdot C$; $P(A) = P(BC) = P(C) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$.

Пример 1.17. Бросили монету и игральную кость. Какова вероятность того, что на монете выпал герб, а на кости – число очков, кратное 3?

Решение. Пусть событие A – «на монете выпал герб», событие B – «на игральной кости выпало число очков, кратное 3».

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Пусть событие C – «одновременное появление событий A и B». Следовательно, $C = A \cdot B$. Так как A и B события независимые, то вероятность появления события C равна

$$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 1.18. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй – 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

Решение. Событие A – «попадание в первый сектор», событие B – «попадание во второй сектор». Данные события несовместны (попадание в один сектор исключает попадание во второй).

Событие C – «попадание либо в первый, либо во второй сектор», т. е. $C = A + B$. Тогда $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$.

Пример 1.19. Монета подброшена три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно 2 раза?

Решение. Пусть A_k – «выпадение цифры при k-том подбрасывании монеты» (k = 1, 2, 3); A – «выпадение двух цифр при трех подбрасываниях». Тогда $A=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$. Слагаемые в правой части этого равенства попарно несовместны, следовательно

$$P(A)=P(A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3)=$$
$$=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3).$$

Так как события A_1, A_2, A_3 – независимы, тогда

$$P(A)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

Пример 1.20. Найти вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число окажется кратным или 2, или 7, или тому и другому одновременно.

Решение. Событие A – «наудачу взятое двухзначное число кратно 2», событие B – «наудачу взятое двухзначное число кратно 7». Найдем $P(C) = P(A + B)$. Так как A и B – события совместные, то $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Двухзначных чисел всего 90, из них 45 – кратны двум (являются четными) и благоприятствуют событию A; 13 чисел кратны семи и благоприятствуют событию B; 7 чисел кратны двум и семи одновременно и благоприятствуют событию AB.

$$P(A) = \frac{45}{90};\ P(B) = \frac{13}{90};\ P(AB) = \frac{7}{90}.$$

Следовательно, $P(A + B) = \dfrac{45}{90} + \dfrac{13}{90} - \dfrac{7}{90} = \dfrac{51}{90}$.

Пример 1.21. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Какова вероятность попадания в мишень при одном выстреле?

Решение. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах (событие A), согласно формуле (22), равна $P(A) = 1 - q^3$, где q – вероятность промаха. По условию $P(A) = 0{,}875$. Следовательно, $0{,}875 = 1 - q^3$ или $q^3 = 1 - 0{,}875$, $q = 0{,}5$. По формуле (18) определим вероятность появления события A: $p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В ящике 20 деталей, из которыз 2 нестандартных. Какова вероятность того, что в наудачу отобранных шести деталях окажется не более одной нестандартной детали?

Ответ: 0,92.

2. В цехе работает несколько станков. Вероятность того, что наладку за смену потребует один станок, равна 0,2. Вероятность того, что наладку за смену потребуют два станка, равна 0,13. Вероятность того, что за смену потребуют наладку больше двух станков, равна 0,07. Какова вероятность того, что за смену придется проводить наладку станков?

Ответ: 0,4.

3. В ящике 35 одинаковых пронумерованных деталей. Вычислить вероятность того, что наудачу вынутая деталь окажется с номером, сумма которого равна либо 4, либо 5, либо 9.

Ответ: 0,314.

4. В ящике находятся катушки четырех цветов: белых катушек – 50 %, красных – 20, зеленых – 20, синих – 10 %. Какова вероятность того, что взятая наудачу катушка окажется зеленой или синей?

Ответ: 0,3.

5. Из 18 студентов, среди которых 5 отличников, формируют случайным образом две группы по 9 человек. Какова вероятность того, что один отличник попадет в одну из групп, а 4 – в другую?

Ответ: 0,132.

6. В трех ящиках содержится по 10 шаров. В первом ящике – 8 красных шаров, во втором – 5, в третьем – 1 красный шар. Из каждого яшика наудачу вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что все 3 вынутых шара – красные?

Ответ: 0,04.

7. В магазин поступает 95 % пальто, изготавливаемых в г. Минске, причем 86 % из них высшего качества. Определить, какова вероятность того, что взятое наудачу пальто, изготовленное в г. Минске, окажется высшего сорта.

Ответ: 0,817.

8. Стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что стрелок поразит мишень при третьем выстреле?

Ответ: 0,096.

9. Два товароведа работают независимо друг от друга. Вероятность пропустить бракованное изделие первым товароведом – 0,1, вторым – 0,2. Какова вероятность того, что при осмотре изделия: а) оба товароведа не пропустят брак; б) оба товароведа пропустят бракованное изделие?

Ответ: а) 0,72; б) 0,02.

10. Рассчитать вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.

Ответ: 0,25.

11. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найти вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола.

Ответ: а) 0,25; б) 0,5.

12. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 5 очков?

Ответ: 0,305.

13. Найти вероятность того, что герб появится хотя бы на одной монете при однократном бросании: а) двух монет; б) трех монет; в) четырех монет.

Ответ: а) 0,75; б) 0,875; в) 0,94.

14. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны $P(A) = 0{,}7$ и $P(B) = 0{,}8$. Какова вероятность попадания в цель при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий?

Ответ: 0,94.

15. В урне 3 красных и 4 синих шара. Из урны дважды вынимают по шару, не возвращая их в урну. Какова вероятность извлечения при втором испытании синего шара, если при первом испытании был извлечен красный шар?

Ответ: 0,289.

16. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Какова вероятность того, что второму студенту достанется «хороший» билет, если первый тоже взял «хороший»?

Ответ: 0,033.

1.6. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Пусть некоторое событие A может произойти при условии, что появится одно из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, ..., B_n, образующих полную группу событий.

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A). \tag{26}$$

Это равенство называют *формулой полной вероятности*, где $P_{B_i}(A)$ – вероятность наступления события A при наступлении гипотезы B_i.

Пусть событие A произошло. Это изменит вероятности гипотез B_1, B_2, ..., B_n и условная вероятность гипотезы $P_A(B_k)$ в предположении, что событие A произошло, определится по формуле Бейеса:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}. \tag{27}$$

Пример 1.22. В урне 10 шаров, из них 4 белых. Один шар, цвет которого неизвестен, укатился. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?

Решение. Пусть событие A – «вынутый шар белый». Возможны следующие предположения (гипотезы) о цвете укатившегося шара: B_1 – «утерянный шар белый», B_2 – «утерянный шар не белый».

$$P(B_1) = \frac{4}{10};\; P(B_2) = \frac{6}{10}.$$

Вероятность вынуть белый шар при условии, что укатился белый шар, равна $P_{B_1}(A) = \frac{3}{9}$. Вероятность вынуть белый шар при условии, что укатился не белый, равна $P_{B_2}(A) = \frac{4}{9}$.

Согласно формуле полной вероятности (26) определим искомую вероятность:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}.$$

Пример 1.23. Имеются 3 одинаковых по виду ящика. В первом находятся две белые мыши и одна серая, во втором – три белые и одна серая, в третьем – две белые и две серые мыши. Какова вероятность того, что из наугад выбранного ящика будет извлечена белая мышь?

Решение. Событие A – «из наугад выбранного ящика извлечена белая мышь». Возможны следующие гипотезы: B_1 – «выбор первого ящика», B_2 – «выбор второго ящика», B_3 – «выбор третьего ящика».

Так как все ящики одинаковы, то $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \dfrac{1}{3}$.

Вероятность выбора белой мыши из первого ящика равна $P_{B_1}(A) = \dfrac{2}{3}$, вероятность выбора белой мыши из второго ящика – $P_{B_2}(A) = \dfrac{3}{4}$, вероятность выбора белой мыши из третьего ящика – $P_{B_3}(A) = \dfrac{2}{4}$.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{23}{36}$.

Пример 1.24. Три охотника произвели залп, причем две пули попали в лису. Какова вероятность того, что первый охотник попал в цель, если вероятности попадания первым, вторым и третьим охотниками соответственно равны 0,4; 0,3; 0,5?

Решение. По условию p_1 = 0,4, p_2 = 0,3, p_3 = 0,5. Тогда по формуле (18) q_1 = 1 – 0,4 = 0,6, q_2 = 1 – 0,3 = 0,7, q_2 = 1 – 0,5 = 0,5.

Пусть событие A – «два охотника попали в лису». Приведем два предположения (гипотезы): B_1 – «первый охотник попал в лису», B_2 – «первый охотник не попал в лису».

По условию $P(B_1) = p_1 = 0{,}4$; $P(B_2) = q_1 = 0{,}6$.

Искомая вероятность того, что первый охотник попал в лису, по формуле Бейеса (27) равна:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}.$$

Найдем условную вероятность того, что в лису попали два охотника, причем одна пуля принадлежит первому охотнику. Следовательно, вторая пуля принадлежит либо второму, либо третьему охотнику:

$$P_{B_1}(A) = p_2 q_3 + p_3 q_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}5 .$$

Вероятность того, что в лису попали два охотника, причем первый промахнулся, равна $P_{B_2}(A) = p_2 p_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$.

Следовательно, $P_A(B_1) = \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}15} = \dfrac{20}{29}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. На склад поступает продукция трех фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 20 %, второй – 46 и третьей – 34 %. Известно, что процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3 %, для второй – 2 и для третьей – 1 %. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным?

Ответ: 0,322.

2. На склад 70 % обоев поступает с первой фабрики, 30 % – со второй. При этом товар первой фабрики имеет 10 % брака, второй – 20 %. Какова вероятность того, что взятый наугад рулон без дефекта?

Ответ: 0,87.

3. Имеется 10 одинаковых по виду урн, в 9 из них находятся по 2 черных и 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 черный. Из наугад выбранной урны извлечен шар. Какова вероятность того, что он взят из урны, содержащей 5 белых шаров, если он оказался белым?

Ответ: 0,156.

4. Электролампы изготавливаются на трех заводах. Первый поставляет 45 % общего количества электроламп, второй – 40, третий – 15 %. Продукция первого завода содержит 70 % стандартных ламп, второго – 80, третьего – 81 %. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность того, что купленная лампа окажется стандартной?

Ответ: 0,757.

5. Для приема зачета преподаватель заготовил 50 задач по дифференциальному исчислению, 30 – по интегральному. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решать 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 – по интегральному?

Ответ: 0,41.

6. В первой урне 50 белых и 10 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар белый?

Ответ: 0,82.

7. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке признано стандартным. Какова вероятность того, что изделие проверил второй товаровед?

Ответ: 0,47.

8. В вычислительной лаборатории имеется 6 микрокалькуляторов (МК) типа А и 4 – типа В. Вероятность того, что во время работы МК типа А не выйдет из строя, равна 0,95. Для второго типа МК эта вероятность равна 0,8. Студент проводит расчет на наудачу выбранной машине. Какова вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя?

Ответ: 0,89.

1.7. Повторные независимые испытания

На практике приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний, в результате каждого из которых может появиться или не появиться событие *A*. При этом представляет интерес исход не каждого отдельного испытания, а число появления события A в результате определенного количества испытаний.

Используем следующие обозначения:

- $P_n(k)$ – вероятность, что при n испытаниях событие A появится ровно k раз;
- $P_n(k_1;k_2)$ – вероятность появления события A не менее k_1 и не более k_2 раз при n испытаниях.

Испытания называются *независимыми относительно события А*, если вероятность события A в каждом испытании постоянна и не зависит от исходов других испытаний.

Формула Бернулли

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности) рассчитывается по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \tag{28}$$

где $q = 1 - p$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз; д) хотя бы один раз, находят соответственно по формулам

а) $P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1)$; (29)

б) $P(A) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n)$; (30)

в) $P(A) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$; (31)

г) $P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$; (32)

д) $P(A) = 1 - P_n(0)$. (33)

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(n) = 1. \tag{34}$$

Пример 1.25. Монету бросают 5 раз. Какова вероятность того, что: а) герб выпал два раза; б) выпало более одного герба?

Решение. Пусть событие A – «выпадение герба при отдельном испытании», тогда

$p=\dfrac{1}{2}$; $q=\dfrac{1}{2}$.

а) по формуле Бернулли:

$$P_5(2)=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{16}=0{,}3125.$$

б) B – событие, что выпало более одного герба.

$$P(B)=P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=1-\big(P_5(0)+P_5(1)\big)=$$

$$=1-C_5^0p^0q^5-C_5^1pq^4=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5-5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}=0{,}8125.$$

Пример 1.26. Фабрика выпускает 70 % продукции высшего сорта. Покупатель приобрел 5 изделий, изготовленных на данной фабрике. Какова вероятность того, что 2 из них – высшего сорта?

Решение. Обозначим через A – «приобретено изделие высшего сорта». Тогда p = 0,7, q = 1 – 0,7 = 0,3.

Вероятность того, что из пяти изделий 2 – высшего сорта, равна

$$P_5(2)=C_5^2\,0{,}7^2\cdot 0{,}3^3=10\cdot 0{,}49\cdot 0{,}027=0{,}1323.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность выигрыша по облигации займа за время его действия равна 0,25. Какова вероятность того, что из 8 приобретенных облигаций 6 выиграют?

Ответ: 0,0038.

2. В магазин вошло 8 покупателей. Найти вероятность того, что 3 из них совершат покупку, если вероятность совершить покупку для каждого равна 0,3.

Ответ: 0,254.

3. В ящике находится 40 % шаров белого цвета, остальные – красные. Из ящика наудачу взяли 5 шаров. Определить вероятность того, что среди них окажется белого цвета: а) два шара; б) не менее 3; в) не более двух.

Ответ: а) 0,3456; б) 0,31744; в) 0,68256.

4. В мастерской имеется 12 моторов. При существующем режиме работы вероятность того, что мотор в данный момент работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент не менее 10 моторов работают с полной нагрузкой.

Ответ: 0,559.

5. Из последовательности чисел от 1 до 100 выбирают наугад с возвращением 10 чисел. Какова вероятность того, что среди них кратных 7 будет не более двух?

Ответ: 0,552.

Простейший поток событий

Потоком событий называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени. Примером потоков могут служить поступление заказов в столе заказов магазина, вызовов на АТС или пункт неотложной скорой помощи и т. д.

Если поток обладает свойством стационарности, ординарности и отсутствия последействия, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительности t определяется по формуле Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \tag{35}$$

где λ – интенсивность потока (среднее число событий в единицу времени).

Пример 1.27. Среднее число заказов, поступающих в стол заказов в одну минуту равно 2. Какова вероятность того, что за 5 минут поступит: а) 2 заказа; б) менее 2 заказов; в) не менее 2 заказов?

Решение:

а) по условию $\lambda = 2$, $t = 5$. Воспользуемся формулой Пуассона (35) и рассчитаем вероятность того, что за 5 минут поступит 2 заказа:

$$P_5(2) = \frac{(2\cdot 5)^2 e^{-10}}{2!} = \frac{100\cdot 0{,}00005}{2} = 0{,}0025;$$

б) определим вероятность того, что поступит менее двух заказов за 5 минут:

$$P_5(k<2) = P_5(0) + P_5(1) = \frac{e^{-10}}{0!} + \frac{10\cdot e^{-10}}{1!} = 0{,}0005;$$

в) события «поступило менее двух заказов» и «поступило не менее двух заказов» противоположны, поэтому вероятность того, что за 5 минут поступит не менее двух заказов, равна:

$$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 0{,}0005 = 0{,}9995.$$

Локальная теорема Лапласа

Вычисление $P_n(k)$ по формуле Бернулли при больших n и k связаны с арифметическими трудностями, поэтому при $n > 50$ пользуются приближенной формулой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (36)$$

Значения p и q имеют тот же смысл, что и в формуле Бернулли.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ – функция вероятностей; $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Значения функции $\varphi(x)$ приведены в прил. 1.

Пример 1.28. Игральную кость бросают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем выпадет 267 раз?

Решение. Вероятность выпадения числа очков, кратное трем равна $p = \frac{1}{3}$, $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. По локальной формуле Лапласа (36) находим:

$$P_{800}(267) = \frac{1}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \cdot \varphi(x), \; x = \frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = 0{,}025.$$

По таблице значений (прил. 1) определяем $\varphi(0{,}025) = 0{,}3989$, $P_{800}(267) = 0{,}03$.

Пример 1.29. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12. Какова вероятность того, что из 100 телевизоров 96 отработают гарантийный срок?

Решение. Вероятность нарушения работы кинескопа $q = 0{,}12$, поэтому вероятность нормальной работы кинескопа равна $p = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$. Вероятность того, что из 100 телевизоров 96 будут работать составит:

$$P_{100}(96)=\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}12\cdot 0{,}88}}\cdot\varphi(x),\ x=\frac{96-100\cdot 0{,}88}{\sqrt{100\cdot 0{,}12\cdot 0{,}88}}=2{,}46.$$

$$\varphi(2{,}46)=0{,}0194,\ P_{100}(96)=\frac{0{,}0194}{3{,}25}=0{,}006.$$

Пример 1.30. Автоматическая штамповка деталей дает 10 % отклонений от принятого стандарта. Какое количество стандартных деталей следует ожидать из 400 деталей, если вероятность их появления равна 0,0587?

Решение. Обозначим через k число стандартных деталей во всей партии. Так как вероятность появления стандартной детали p = 0,9, а брака q = 0,1, то по теореме Лапласа имеем:

$$P_{400}(k)=\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\cdot\varphi(x)=0{,}0587.$$

Из полученного уравнения $\varphi(x)$ = 0,0587 · 6 = 0,3522. По таблице прил. 1 найденному значению функции $\varphi(x)$ = 0,3522 соответствует значение аргумента, равное x = 0,5.

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}};\ 0{,}5=\frac{k-400\cdot 0{,}9}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=\frac{k-360}{6}.$$

Отсюда k = 360 + 3 = 363.

Задачи для самостоятельного решения

1. В урне смешаны 80 % белых и 20 % красных шаров. Сколько красных шаров с вероятностью p = 0,09 можно ожидать среди 100 наудачу выбранных шаров?

Ответ: 81.

2. Орудие при выстреле поражает цель с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах орудия произошло 80 попаданий?

Ответ: 0,099.

3. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появления события A в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5?

Ответ: 55.

Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность наступления события A в каждом из независимых испытаний постоянна и $0 < p < 1$, то вероятность того, что в n испытаниях событие произойдет от k_1 до k_2 (при достаточно большом n) равна

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (37)$$

где $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ – функция Лапласа.

Функция Лапласа $\Phi(x)$ существует при любом действительном значении x. Свойства функции:

1) функция Лапласа – нечетная функция, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2) при возрастании x от 0 до 5 $\Phi(x)$ возрастает от 0 до 0,5. Для $x > 5$ $\Phi(x) \cong 0{,}5$.

Таблица значений $\Phi(x)$ для $x \in (0;5)$ находится в прил. 2.

Пример 1.31. На оптовую базу поступает в среднем 70 % продукции высшего сорта. Какова вероятность того, что в партии из 1000 изделий проверенных товароведом, число изделий высшего сорта, заключено между 652 и 760?

Решение. Событие A – «появление изделия высшего сорта», вероятность наступления события в отдельном испытании равна p = 0,7. Требуется найти: $P_{1000}(652;760) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.

Расчет производим по следующей схеме:

$np = 0{,}7 \cdot 1000 = 700$; $npq = 700 \cdot 0{,}3 = 210$;

$\sqrt{npq} = \sqrt{210} = 14{,}491$;

$$x_1 = \frac{652 - 700}{14{,}491} = -3{,}31; \quad x_2 = \frac{760 - 700}{14{,}491} = 4{,}14.$$

По таблице прил. 2 определяем:

$\Phi(x_1) = \Phi(-3{,}31) = -0{,}4991$; $\Phi(x_2) = \Phi(4{,}14) = 0{,}4999$.

Искомая вероятность $P_{1000}(652; 760) = 0{,}4999 + 0{,}4991 = 0{,}999$.

Пример 1.32. Посажено 400 деревьев. Какова вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 250, если вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,8?

Решение. Число прижившихся деревьев должно удовлетворять неравенству $250 < k \le 400$, поэтому вероятность этого события равна:

$P_{400}(250; 400) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2) = 0{,}999$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти вероятность того, что число выпадения тройки при 4200 бросаниях игральной кости будет заключено от 100 до 200.

Ответ: 0,483.

2. Фабрика выпускает 75 % изделий первого сорта. Какова вероятность того, что из 300 изделий число первосортных заключено между 219 и 234?

Ответ: 0,673.

3. Вероятность появления события A в опыте $p = 0{,}2$. Опыт повторяется 400 раз. Какова вероятность того, что при этом событие произойдет: а) 80 раз; б) не менее 70 раз, но не более 80 раз; в) не менее 78 раз; г) не более 78 раз?

Ответ: а) 0,05; б) 0,33; в) 0,6; г) 0,4.

4. На склад поступает продукция трех фабрик. Изделия первой фабрики составляют 30 % всех изделий, второй – 32, третьей – 38 %. В продукции первой фабрики 60 % изделий высшего сорта, второй – 25, третьей – 50 %. Какова вероятность того, что среди 300 наудачу взятых изделий число изделий высшего сорта заключено между 130 и 170?

Ответ: 0,719.

Наивероятнейшее число появлений события

Число наступлений события в независимых испытаниях называется *наивероятнейшим*, если вероятность наступления события данное число раз в этой серии испытаний наибольшая по сравнению с вероятностями других исходов.

Наивероятнейшее число события удовлетворяет неравенствам $np - q \le k_0 \le np + p$, где n – число испытаний, p – вероятность наступления события A в отдельном испытании, $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие A не произойдет. Так как разность $np + p - (np - q) = p + q = 1$, то всегда существует целое число k_0, удовлетворяющее приведенному выше двойному равенству.

Причем, если:

1) ($np - q$) – целое число, то наивероятнейших чисел два: $k_0 = np - q$ и $k_0 = np + p$;

2) np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$;

3) $np - q$ – дробное, то существует одно k_0.

Пример 1.33. Игральную кость бросают 100 раз. Найти наибольшее вероятное число опытов, в которых число выпавших очков кратно 3.

Решение. Так как n = 100, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, следовательно, искомое наивероятнейшее число удовлетворяет неравенствам

$$100\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \le k_0 \le 100\frac{1}{3} + \frac{1}{3}; \quad 32{,}3 \le k_0 \le 33{,}6.$$

Отсюда следует, что $k_0 = 33$.

Пример 1.34. Определить, сколько раз надо подбросить монету, чтобы наивероятнейшее число выпадения герба было равно 30.

Решение. Пусть событие A – выпадение герба, тогда $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $k_0 = 30$. Требуется найти число независимых испытаний n, удовлетворяющих двойному неравенству $np - q \le k_0 \le np + p$.

$$n \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \le 30 \le n \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}; \quad n \ge 59 \text{ и } n \le 61.$$

Таким образом, необходимо провести от 59 до 61 независимых испытаний.

Пример 1.35. Какова вероятность наступления события A в каждом испытании, если наивероятнейшее число наступления события A в 120 испытаниях равно 32?

Решение. Согласно неравенству $np - q \le k_0 \le np + p$ имеем:

$$120p - (1 - p) \le 32; \quad 120p + p \ge 32.$$

Решая полученную систему, находим, что $\frac{32}{121} \le p \le \frac{33}{121}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность поражения цели при одном выстреле $p = 0{,}8$. Каково наивероятнейшее число поражения цели при 20 выстрелах?

Ответ: 16.

2. Найти наивероятнейшее число наступлений ясных дней в течение первой декады сентября, если по данным наблюдений известно, что в сентябре в среднем бывает 11 ненастных дней.

Ответ: 6.

3. Было посажено 28 деревьев с одинаковой вероятностью приживания. Как велика эта вероятность, если наиболее вероятные числа положительных результатов 17 и 18?

Ответ: 0,62.

4. Число бракованных изделий в партии товаров составляет 25 %. Сколько изделий должно быть в отдельной партии, если наивероятнейшее число бракованных изделий в ней равно 114?

Ответ: $455 \le n \le 459$.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Понятие случайной величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания из множества возможных значений принимает одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случая.

Случайная величина характеризуется значениями, которыми она может принимать, и вероятностями, с которыми эти значения принимаются.

В отличие от случайного события, которое является качественной характеристикой результата испытания, случайная величина характеризует результат испытания *количественно.*

Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

Дискретной (*прерывной*) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным либо бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита (X, Y, Z), а их значения – строчными буквами с индексами (например, x_1, x_2, x_3).

Дискретная случайная величина считается *заданной*, если известны все возможные ее значения и их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих вероятностей.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит все возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 .$$

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i) и соединяют их последовательно отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения.*

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан аналитически или с помощью функции распределения.

Распределение дискретной случайной величины идет согласно формуле

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i). \tag{38}$$

Пример 2.1. Построить многоугольник распределения, если дискретная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1

P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение. В прямоугольной системе координат строим точки $M_1(0,2;0,1)$, $M_2(0,4;0,2)$, $M_3(0,6;0,4)$, $M_4(0,8;0,2)$, $M_5(1;0,1)$. Соединяем эти точки отрезками прямых (рис. 2.1). Ломаная $M_1M_2M_3M_4M_5$ является многоугольником распределения.

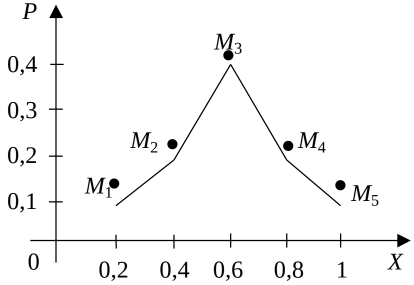

Рис. 2.1

Пример 2.2. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красных. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу красных карандашей в выборке.

Решение. В выборке из трех карандашей может не оказаться ни одного красного карандаша, может появиться 1, 2 или 3 красных карандаша. Поэтому, случайная величина X может принимать только четыре значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Найдем вероятность этих значений:

$$p_1 = P(X=0) = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}; \; p_2 = P(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35};$$

$$p_3 = P(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}; \; p_1 = P(X=3) = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Следовательно, случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$\sum p_i = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.$$

Пример 2.3. В партии товаров 10 % бракованных изделий. Наудачу отобрано 4 изделия. Найти закон распределения случайной величины X – числа бракованных изделий среди 4 отобранных.

Решение. Случайная величина X имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (ни одно из изделий не браковано), $x_2 = 1$ (одно изделие из 4 браковано), $x_3 = 2$ (два изделия из 4 бракованы), $x_4 = 3$ (три изделия из 4 бракованы), $x_5 = 4$ (все изделия из 4 отобранных бракованы).

Вероятности этих значений рассчитаем по формуле Бернулли (28):

при $n = 4$: $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$P_4(0) = 0{,}94 = 0{,}6561$; $P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$;

$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$; $P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9 = 0{,}0036$;

$P_4(4) = 0{,}1^4 = 0{,}0001$.

Ряд распределения будет иметь следующий вид:

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Аналитический закон распределения в данном примере представлен формулой Бернулли и назван *биномиальным.*

Если число испытаний n велико и вероятность p появления события A в одном испытании мала, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится ровно в k испытаниях, находится по приближенной формуле Пуассона:

$$P_n(k) \cong \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{39}$$

где $\lambda = np$.

2.2. Функция распределения

Наиболее общей формой задания случайной величины является функция распределения.

Функцей распределения (*интегральной функцией*) случайной величины X называется функция действительной переменной x, определяемая равенством

$$F(x) = P(X < x), \tag{40}$$

где $P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Основные свойства функции распределения

1. Функция распределения является неубывающей, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

2. $0 \le F(x) \le 1$.

3. Если возможные значения случайной величины $X \in (a;b)$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$, $F(x) = 1$, $x > b$.

4. Вероятность того, что значение случайной величины X окажется на заданном интервале $(a;b)$ определяется формулой

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \tag{41}$$

Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения x_1, x_2, …, x_n с соответствующими вероятностями, имеет следующий вид:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k), \tag{42}$$

где символ $\sum\limits_{x_k < x}$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x.

Пример 2.4. Найти функцию распределения случайной величины, если закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Решение.

1. При $x \le 0$.

$F(x) = \sum\limits_{x_k < 0} P(X = x_k) = 0$, так как величина X не принимает значений меньше 0.

2. При $0 < x \le 1$.

$F(x) = \sum\limits_{x_k < 1} P(X = x_k) = P(X = 0) = 0{,}2$.

3. При $1 < x \le 2$.

$F(x) = \sum\limits_{x_k < 2} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.

4. При $2 < x \le 3$.

$F(x) = \sum\limits_{x_k < 3} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}9$.

5. При $x > 3$.

$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ 0{,}6 & \text{при} \quad 1 < x \le 2; \\ 0{,}9 & \text{при} \quad 2 < x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ отражен на рис. 2.2.

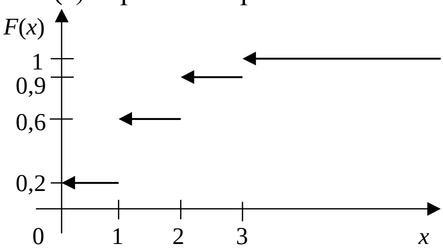

Рис. 2.2

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (2;5) равна $P(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Пример 2.5. Охотник имеет 4 патрона и стреляет до первого попадания в цель (или пока не израсходуются патроны). Найти функцию распределения числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25.

Решение. Вероятность попадания $p = 0{,}25$, следовательно $q = 0{,}75$.

Случайная величина X (число израсходованных патронов) имеет следующие значения: $x_1 = 1$ (одно попадание), $x_2 = 2$ (один промах и одно попадание), $x_3 = 3$ (два промаха и одно попадание), $x_4 = 4$ (три промаха и одно попадание или четыре промаха).

Найдем вероятность того, что стрельба закончится при четвертом выстреле, т. е. первые три выстрела дали промахи, а четвертый выстрел – попадание. Так как события независимы, то искомая вероятность $p = q \cdot q \cdot q \cdot p = q^3 \cdot p$. Тогда искомый закон распределения запишем в виде следующей таблицы:

X	1	2	3	4
P	0,25	$0{,}75 \cdot 0{,}25 =$ $= 0{,}1875$	$0{,}75^2 \cdot 0{,}25 =$ $= 0{,}1406$	$0{,}75^3 \cdot 0{,}25 + 0{,}75^4 =$ $= 0{,}4219$

$$\sum P_i = 0{,}25 + 0{,}1875 + 0{,}1406 + 0{,}4219 = 1.$$

Функция распределения имеет вид: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1; \\ 0{,}25 & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 0{,}4375 & \text{при } 2 < x \le 3; \\ 0{,}5781 & \text{при } 3 < x \le 4; \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$

Задачи для самостоятельного решения

1. Игральную кость подбрасывают 3 раза. Найти закон распределения случайной величины X (число невыпадений единицы).

X	0	1	2	3
P				

2. В партии 6 деталей, из которых 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Найти функцию распределения случайной величины X (число стандартных деталей среди отобранных).

X	0	1	2	3

P				

3. Две игральные кости бросают 2 раза. Написать закон распределения случайной величины X (число выпадений четного числа очков на двух игральных костях).

X	0	1	2
P			

4. Подбрасываются две монеты. Найти функцию распределения случайной величины X (число выпадений герба на верхних сторонах монеты). Построить график этой функции.

5. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на “отлично”, наугад извлекают 3 работы. Найти функцию распределения случайной величины X (число оцененных на “отлично” работ среди извлеченных). Используя функцию распределения, найти вероятность события $1 \le X \le 2$.

2.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, при решении ряда практических задач нет необходимости знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности. Целесообразнее пользоваться некоторыми количественными показателями, которые давали бы в сжатой форме достаточную информацию о случайной величине. Такие показатели называют *числовыми характеристиками случайной величины*. Основными из них являются математическое ожидание, дисперсия, моменты различных порядков.

Математическим ожиданием $M(x)$ *дискретной случайной величины* X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \; . \qquad (43)$$

Дисперсией $D(x)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i \,. \qquad (44)$$

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k) = x_1^k p_1 + x_2^k p_2 + \ldots + x_n^k p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \,. \qquad (45)$$

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию $v_1 = M(X)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M\left[X - M(X)\right]^k = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i - M(X)\right]^k \cdot p_i \,. \qquad (46)$$

Центральный момент второго порядка равен дисперсии $D(X)$:

$$\mu_2 = M\left[X - M(X)\right]^2 = \sum\left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i = D(X) \,.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1) математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $M(C) = C$;

2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = C \cdot M(X)$;

3) математическое ожидание отклонения равно 0: $M[X - M(X)] = 0$;

4) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

5) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Математическое ожидание – это среднее значение данной случайной величины, центр ее распределения.

Другой важной характеристикой случайной величины является *дисперсия*, которая служит мерой рассеивания данной случайной величины по отношению к ее математическому ожиданию.

Дисперсия случайной величины обладает свойствами:

1) дисперсия постоянной равна 0: $D(C) = 0$;

2) постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2D(X)$;

3) если X и Y независимые случайные величины, тогда

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y);\ \ D(X - Y) = D(X) + D(Y);$$

4) дисперсия случайной величины X равна математическому ожиданию ее квадрата без квадрата ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Среднее квадратическое отклонение (σ) вычисляется по формуле

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\,. \qquad (47)$$

Пример 2.6. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины X, заданной следующим законом распределения:

X	1	2	3	4
P	0,3	0,1	0,4	0,2

Решение. Найдем дисперсию случайной величины двумя способами.

1. Математическое ожидание (начальный момент первого порядка) равен $M(X) = \nu_1 = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 = 2{,}5$.

Вычислим начальный момент третьего порядка: $\nu_3 = M(X^3) = 1^3 \cdot 0{,}3 + 2^3 \cdot 0{,}1 + 3^3 \cdot 0{,}4 + 4^3 \cdot 0{,}2 = 24{,}7$.

Рассчитаем дисперсию (центральный момент второго порядка): $D(X) = \mu_2 = (1 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}3 + (2 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}1 + (3 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}4 + (4 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}2 = 1{,}25$.

2. Второй способ вычисления дисперсии основан на свойстве 4:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Так как $M(X^2) = 1 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}2 = 7{,}5$ то $D(X) = 7{,}5 - (2{,}5)^2 = 1{,}25$.

Используя формулу (46) определим центральный момент третьего порядка: $\mu_3 = (1 - 2{,}5)^3 \cdot 0{,}3 + (2 - 2{,}5)^3 \cdot 0{,}1 + (3 - 2{,}5)^3 \cdot 0{,}4 + (4 - 2{,}5)^3 \cdot 0{,}2 = 17{,}425$.

Найдем числовые характеристики дискретной случайной величины, подчиняющейся биномиальному распределению. В этом случае возможными значениями случайной величины X являются 0, 1, 2, …, n, а вероятности вычисляются по формуле Бернулли. Запишем биномиальный закон в виде следующей таблицы:

X	0	1	2	…	k	…	n

P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Запишем выражение начального момента первого порядка (математическое ожидание):

$$\nu_1 = M(X) = C_n^1 pq^{n-1} + 2C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + np^n = np(p+q)^n = np\,.$$

Дисперсия (центральный момент второго порядка) может быть вычислена по следующей формуле:

$$D(X) = \mu_2 = M(X^2) - [M(X)]^2 = npq. \qquad (48)$$

Распределение Пуассона, задается в виде следующего закона распределения:

X	0	1	2	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\lambda^2 e^{-\lambda} / 2!$	…	$\lambda^k e^{-\lambda} / k!$	…

Отличительной особенностью распределения Пуассона является равенство математического ожидания и дисперсии:

$$M(X) = D(X) = \lambda = np. \qquad (49)$$

Пример 2.7. Два стрелка стреляют в цель, выбивая очки от 0 до 5. Определить, какой стрелок стреляет лучше, если:

- для первого стрелка величина X (число выбиваемых очков) задается следующим законом распределения:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

- для второго стрелка величина X задается законом распределения:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Решение. Для определения лучшего стрелка нужно найти средние значения выбиваемых очков, с учетом соответствующих вероятностей, для каждого стрелка:

- для первого стрелка:

$M(X_1) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}7.$

- для второго стрелка:

$M(X_2) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 = 2{,}6.$

Так как первый стрелок выбивает в среднем 2,7 очка, а второй 2,6, следовательно, первый стрелок стреляет лучше.

Для того, чтобы оценить у какого стрелка рассеяние меньше, рассчитаем дисперсию каждого стрелка:

$D(X_1) = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}2 - 2{,}7^2 = 9{,}9 - 7{,}29$ =

= 2,61.

$D(X_2) = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}1 - 2{,}6^2 = 8{,}8 - 6{,}76$ =

= 2,04.

Следовательно, второй стрелок стреляет более “кучно”, так как его дисперсия меньше.

Пример 2.8. В партии из 10 деталей содержится 3 нестандартные. Наудачу отобраны 2 детали. Найти начальный момент первого и третьего порядка и центральные моменты второго и третьего порядка дискретной случайной величины X (число нестандартных деталей среди отобранных).

Решение. Закон распределения может быть задан в виде следующей таблицы:

X	0	1	2
P	21/45	21/45	3/45

$$\nu_1 = 0 \cdot \frac{21}{45} + 1 \cdot \frac{21}{45} + \frac{2 \cdot 3}{45} = \frac{27}{45}; \quad \nu_2 = \frac{21}{45} + \frac{4 \cdot 3}{45} = \frac{33}{45};$$

$$\nu_3 = 1 \cdot \frac{21}{45} + 2^3 \cdot \frac{3}{45} = 1;$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{33}{45} - \left[\frac{27}{45}\right]^2 = \frac{28}{75};$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2 = 1 - 3 \cdot \frac{27}{45} \cdot \frac{33}{45} + 2 \cdot \left[\frac{27}{45}\right]^2 = \frac{2}{5}.$$

Пример 2.9. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины $Z = 2X + Y$, если известно, что $M(X) = 2$, $M(Y) = 5$.

Решение. Согласно свойствам математического ожидания

$M(Z) = M(2X + Y) = M(2X) + M(Y) = 2M(X) + M(Y) = 2 \cdot 2 + 5 = 9.$

Пример 2.10. Производятся независимые опыты, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p. Опыты продолжаются до первого появления события A. Найти математическое ожидание случайной величины X (число произведенных опытов).

Решение. Возможные значения этой случайной величины $x_n = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Событие $X = n$ означает, что в первых $n - 1$ опытах событие A не наступит, а в n-ом опыте наступит. Вероятность такого исхода равна

$$P(X = n) = \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{1\ \text{раз}} \cdot p = pq^{n-1}\ (q = 1 - p).$$

Следовательно, закон распределения случайной величины X можно представить в виде таблицы

X	1	2	3	…	n	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	…

$M(X) = 1 \cdot p + 2pq + 3pq^2 + \ldots + npq^{n-1} + \ldots = p(1 + 2q + 3q^2 + \ldots +$ $+ nq^{n-1} + \ldots)$.

Ряд, записанный в скобках, получается дифференцированием геометрического ряда $q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \dfrac{q}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} - 1$.

Следовательно, $M(X) = p\left(\dfrac{1}{1-q} - 1\right)' = p\dfrac{1}{(1-q)^2} = \dfrac{p}{p^2} = \dfrac{1}{p}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X (число появления события A в 100 независимых испытаниях), если в каждом испытании вероятность наступления события A равна 0,7.

Ответ: 21.

2. Найти начальные центральные моменты первого, второго и третьего порядков случайной величины X, которая задана законом распределения:

X	2	3
P	0,4	0,6

Ответ: $\nu_1 = 2{,}6$, $\nu_2 = 7$, $\nu_3 = 19{,}4$; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0{,}24$, $\mu_3 = -17{,}624$.

3. Монету бросают 4 раза. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появлений герба.

Ответ: $M(X) = 2$, $D(X) = 1$.

4. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что первый станок не требует наладки равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,75, четвертого – 0,7. Найти математическое ожидание числа станков, не требующих наладки.

Ответ: 3,15.

5. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 3X + 4Y$, если $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

Ответ: $M(Z) = 30$.

6. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p = 0{,}5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p = 0{,}34$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X) = 8$.

Ответ: $x_3 = 21$, $p_3 = 0{,}2$.

2.4. Плотность распределения

Непрерывной называют такую случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение C, равна нулю ($P(X = C) = 0$), так как это есть вероятность того, что из бесконечного множества значений выпадает наперед заданное. Следовательно, значениям X в этом случае нельзя ставить в соответствии их вероятности. Закон распределения непрерывной величины X может быть задан с помощью функции распределения:

$$F(x) = P(-\infty < X < x). \qquad (50)$$

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения:

$$p(x) = f(x) = F'(x). \qquad (51)$$

Плотность распределения называют также *дифференциальной функцией распределения.* Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{52}$$

Плотность распределения вероятностей обладает следующими свойствами:

1. $f(x) \ge 0$. (53)

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. (54)

3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$. (55)

4. $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1$, если $X \in (a;b)$. (56)

График дифференцируемой функции называют кривой распределения. Дифференциальная функция существует только для непрерывных случайных величин, а интегральная как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Функция $f(x)$ вероятностью не является.

Пример 2.11. Плотность распределения случайной величины X задана функцией $f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$. Найти значение параметра c.

Решение. Используя формулу (54) получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 1; \ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{0} + \operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-\infty) + \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 0 = \pi.$$

$$c = 1\Big/\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}; \;\; f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Пример 2.12. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X* примет значение из интервала (1;2), если плотность вероятности величины *X* задана следующей функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ x/2 & \text{при } 0 < x \le 2; \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Решение. $P(1 < X < 2) = \int\limits_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

Пример 2.13. Найти плотность распределения случайной величины *X*, функция распределения которой имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Решение. $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{при } x > 0, \end{cases}$

где $\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)' = \dfrac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}.$

Пример 2.14. Найти функцию распределения *F*(*x*), если плотность распределения случайной величины *X* равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \text{ и } x > 2; \\ x & \text{при } 0 < x \le 1; \\ 2 - x & \text{при } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Решение. Используя формулу (52) получим:

- при $x \le 0$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$;

- при $0 < x \le 1$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{x} x\,dx = 0 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$;

- при $1 < x \le 2$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{1} x\,dx + \int\limits_{1}^{x} (2-x)\,dx = 0 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 +$

$$+\left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^x = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

Искомая функция распределения имеет вид: $x > 2$,

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{1} x\,dx + \int\limits_{1}^{2} (2-x)\,dx + \int\limits_{2}^{x} 0\,dx = 0 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 + 0 =$$

= 0,5 + 4 – 2 – 2 + 0,5 + 0 = 1.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ x^2/2 & \text{при } 0 < x \le 1; \\ -x^2/2 + 2x - 1 & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ отражены на рис. 2.3 и 2.4.

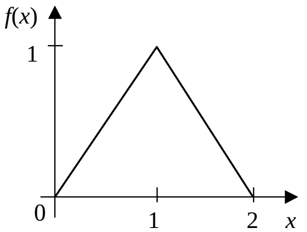

Рис. 2.3

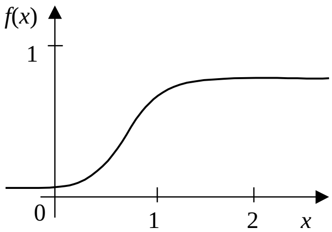

Рис. 2.4

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти значение коэффициента C и плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, функция распределения которой имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ Cx^3 & \text{при } 0 < x \le 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $C = 1$; $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0; \\ 3x^3 & \text{при } 0<x\le 1; \\ 0 & \text{при } x>1. \end{cases}$

2. Найти вероятность того, что значение случайной величины X принадлежит интервалу (2; 3), если плотность распределения величины X задана функцией: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0; \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{при } x>0. \end{cases}$

Ответ: 0,2.

3. Найти плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, функция распределения которой имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le -1; \\ 1/2 & \text{при } -1<x\le 0; \\ (x+1)/2 & \text{при } 0<x\le 1; \\ 1 & \text{при } x>1. \end{cases}$$

Какова вероятность того, что значение случайной величины X принадлежит интервалу (0,5; 1)?

Ответ: $P = 0,5$.

4. Найти интегральную функцию распределения $F(x)$ и оценить вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал (0,5; 1,5), если плотность распределения величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 1; \\ x-0,5 & \text{при } 1<x\le 2; \\ 0 & \text{при } x>2. \end{cases}$

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Ответ: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 1; \\ 0,5(x^2-x) & \text{при } 1<x\le 2; \\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$ $P(0,5 < X < 1,5) = 0,375$.

2.5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется по следующей формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx, \tag{57}$$

где $X \in (-\infty,+\infty)$.

Дисперсия непрерывной случайной величины X:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - [M(x)]^2, \tag{58}$$

где $X \in (-\infty;+\infty)$.

Все свойства $M(X)$ и $D(X)$, указанные выше в п. 2.3 для дискретных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Начальный момент порядка k непрерывной случайной величины X вычисляется по формуле

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\,dx. \tag{59}$$

Центральный момент порядка k непрерывной случайной величины X, определяется равенством:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^k \cdot f(x)\,dx. \tag{60}$$

Если все возможные значения X принадлежат интервалу $(a; b)$, то

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx; \tag{61}$$

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 \cdot f(x)\,dx. \tag{62}$$

Пример 2.15. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, которая задана дифференцированной функцией $f(x) = 2x$ в интервале $(0; 1)$, вне его $f(x) = 0$.

Решение. $M(X)=\int\limits_a^b x\cdot f(x)\,dx=\int\limits_0^1 x\cdot 2x\,dx=2\int\limits_0^1 x^2\,dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

$$D(X)=\int\limits_a^b x^2\cdot f(x)\,dx-\left[M(X)\right]^2=\int\limits_0^1 x^2\cdot 2x\,dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=$$

$$=2\int\limits_0^1 x^3\,dx-\frac{4}{9}=2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

Пример 2.16. Найти математическое ожидание и начальный момент второго порядка случайной величины *X*, заданной интегральной функцией: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ x/2 & \text{при} \quad 0<x\le 2;\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$

Решение. Найдем дифференциальную функцию *X*:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ 1/2 & \text{при} \quad 0<x\le 2;\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Используя формулу (61) рассчитаем математическое ожидание: $M(X)=\frac{x^2}{4}\Big|_0^2=1$.

По формуле (60) найдем начальный момент второго порядка: $\nu_2=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3}$.

Пример 2.17. Случайная величина *X* задана интегральной функцией распределения: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ x^3 & \text{при} \quad 0<x\le 1;\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$

Необходимо выполнить следующее:

1. Найти плотность вероятности (дифференциальную функцию).
2. Вычислить математическое ожидание и дисперсию *X*.
3. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,5).

4. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

1. Найдем функцию плотности вероятности случайной величины X. Согласно формуле (51) плотность вероятности $f(x)$ равна

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ 3x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

2. Вычислим математическое ожидание используя формулу (61):

$$M(x) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2\, dx = 3\int_0^1 x^3\, dx = 3\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Дисперсию величины X рассчитаем по формуле (58):

$$D(x) = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx - M^2(x) = 3\int_0^1 x^4 dx - \frac{9}{16} = 3\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} =$$

$$= \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}.$$

3. Согласно формуле (55) вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,5) будет равна: $P(0{,}25 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}5^3 - 0{,}25^3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$.

4. Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$. Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ отражены на рис. 2.5 и 2.6.

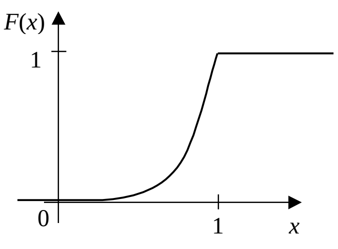

Рис. 2.5. **График интегральной функции**

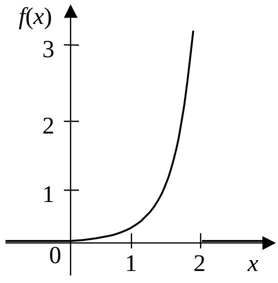

Рис. 2.6. **График дифференциальной функции**

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти дисперсию случайной величины X, заданной следующей интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ x^2/64 & \text{при} \quad 0 < x \le 8; \\ 1 & \text{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{32}{9}$.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана дифференциальной функцией $f(x)=\dfrac{2}{25}x$ в интервале (0; 5) и вне его $f(x) = 0$.

Ответ: $D(X) = 110$, $\sigma(X) = \dfrac{5}{6}$.

3. Найти начальные и центральные моменты первых трех порядков случайной величины X, которая задана следующей функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $\nu_1=\dfrac{3}{4}$; $\nu_2=\dfrac{3}{5}$; $\nu_3=\dfrac{1}{2}$; $\mu_1=0$; $\mu_2=\dfrac{3}{80}$; $\mu_3=\dfrac{1}{160}$.

2.6. Законы распределения непрерывных случайных величин

Законы распределения непрерывных случайных величин чаще всего задаются их дифференциальными функциями распределения.

Равномерное распределение

Распределение вероятностей случайной величины X называется *равномерным на отрезке* $[a; b]$, если плотность вероятностей этой величины постоянна на данном отрезке и равно нулю вне этого отрезка.

$$f(x)=\begin{cases} C & \text{при} \quad a<x\le b; \\ 0 & \text{при} \quad x\le a \ \text{ при } \ x>b. \end{cases}$$

Найдем значение C: $\int\limits_a^b f(x)\,dx=1$ или $\int\limits_a^b C\,dx=1$.

$\int\limits_a^b C\,dx = Cx\Big|_a^b = C(b-a)=1$; $C=\dfrac{1}{b-a}$.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le a; \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a<x\le b; \\ 0 & \text{при } x>b. \end{cases} \qquad (63)$$

Найдем интегральную функцию $F(x)$ случайной величины X, имеющей равномерное распределение, используя формулу (52).

Если $x\le a$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x)=0$.

Если $a<x\le b$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a}0\,dx+\int\limits_a^x\dfrac{1}{b-a}\,dx=\dfrac{x-a}{b-a}$.

Если $x>b$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a}0\,dx+\int\limits_a^b\dfrac{dx}{b-a}+\int\limits_b^x 0\,dx=\dfrac{b-a}{b-a}=1$.

Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x\le b; \\ 1 & \text{при } x>b. \end{cases} \qquad (64)$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ представлены на рис. 2.7 и 2.8.

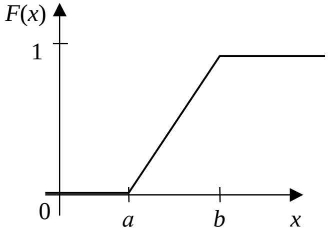

Рис. 2.7

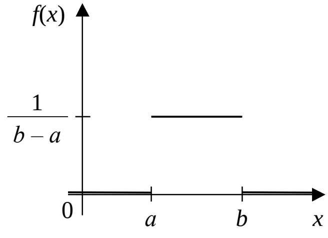

Рис. 2.8

Пример 2.18. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a;\, b]$.

Решение.

$$M(X)=\int\limits_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=\int\limits_a^b x^2\,\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2==\frac{1}{3(b-a)}\cdot\left(b^3-a^3\right)+$$

$$+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Следовательно, $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$; $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Пример 2.19. Найти вероятность того, что случайная величина X, распределенная равномерно в интервале (2; 8), примет значение, принадлежащее интервалу (5; 7).

Решение. Для равномерного распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le a;\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a<x\le b;\\ 0 & \text{при } x>b.\end{cases}\quad \text{или}\quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2;\\ 1/6 & \text{при } 2<x\le 8;\\ 0 & \text{при } x>8.\end{cases}$$

$$P(5<X<7)=\int\limits_5^7\frac{1}{6}\,dx=\frac{1}{6}x\Bigg|_5^7=\frac{1}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти плотность распределения $P(x)$ и функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, которая равномерно распределена на отрезке [3; 8].

Ответ: $P(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 3;\\ 0{,}2 & \text{при } 3<x\le 8;\\ 0 & \text{при } x>8.\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 3;\\ \dfrac{x-3}{5} & \text{при } 3<x\le 8;\\ 1 & \text{при } x>8.\end{cases}$

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [–3; 3].

Ответ: $M(X) = 0$; $D(X) = 3$; $\sigma = \sqrt{3}$.

Нормальное распределение

Нормальным распределением, или распределением Гаусса, называется распределение с плотностью вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{65}$$

где a – математическое ожидание;

σ – среднее квадратическое отклонение.

График функции $P(x)$ называют нормальной кривой (рис. 2.9) $a = 3$, $\sigma = 1$.

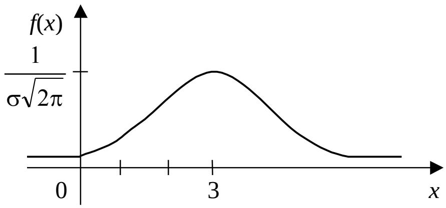

Рис. 2.9

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервал (α, β) определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{66}$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Функция Лапласа описывается следующей формулой:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}\, dx. \tag{67}$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ отражается формулой

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (68)$$

В частности, при $a = 0$: $P(|x|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{a}\right)$.

Пусть $\frac{\delta}{\sigma}=t$, $\delta=\sigma t$. При $t = 3$, $\sigma t=3\sigma$, то

$$P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973. \qquad (69)$$

Полученная формула выражает *правило трех сигм*.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ плотность распределения примет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}. \qquad (70)$$

Распределение вероятностей называется *нормированным* или *стандартным*, а график функции – *нормированной кривой* (рис. 2.10).

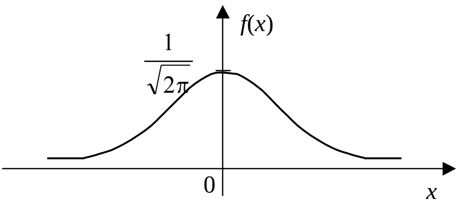

Рис. 2.10

Числовые характеристики для нормальной случайной величины X следующие: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

Пример 2.20. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 10$. Найти $P(0 < X < 10)$, если известно, что $P(10 < X < 20) = 0{,}3$.

Решение. По условию $a = M(X) = 10$.

$$P(10 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi(0) =$$

$$= \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 0 = 0{,}3; \quad \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3.$$

$$P(0 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right) = \Phi(0) - \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right). \text{ Так как } \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3, \text{ следовательно } P(0 < X < 10) = 0{,}3.$$

Пример 2.21. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами a = 375 г, σ = 25 г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

Решение:

а) при $\alpha = 300$ и β = 425 вероятность равна:

$$P = (300 < X < 425) = \Phi\left(\frac{425-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300-375}{25}\right) = \Phi(2) - \Phi(-3) =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(3) = 0{,}477250 + 0{,}498650 = 0{,}9759.$$

б) при X < 450:

$$P(0 < X < 450) = P(\alpha X < 450) = \Phi\left(\frac{450-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{0-375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-15) = \Phi(3) + \Phi(15) = 0{,}49869 + 0{,}5 = 0{,}9987.$$

в) при X > 300:

$$P(X > 300) = P(300 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{+\infty-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300-375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(-3) = \Phi(+\infty) + \Phi(3) = 0{,}5 + 0{,}49865 = 0{,}9987.$$

Пример 2.22. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 мм. Какова вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм?

Решение. Для расчета используем формулу (68) с учетом того, что по условию δ = 15 и σ = 10.

$$P(|X - a| < 15) = 2\Phi\left(\frac{15}{10}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}433193 = 0{,}866386.$$

Пример 2.23. Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превышает 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если случайная величина X распределена нормально с параметром $\sigma = 0{,}4$ мм?

Решение. По условию $\delta = 0{,}77,\ \sigma = 0{,}4$.

$$P\left(\left|X - a\right| < 0{,}77\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}77}{0{,}4}\right) = 2\Phi(1{,}93) = 2\cdot 0{,}473197 = 0{,}946394$$

Считая приближенно $p = 0{,}95$ и $q = 0{,}05$, в соответствии с неравенством $np - q \le k_0 \le np + p$, при $n = 100$ находим:

$$100\cdot 0{,}95 - 0{,}05 \le k_0 \le 100\cdot 0{,}95 + 0{,}95;\quad 94{,}95 \le k_0 \le 95{,}95.$$

Отсюда $k_0 = 95$.

Пример 2.24. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры X. Случайная величина X распределена нормально, с параметрами $a = 10$ мм, $\sigma = 0{,}1$ мм. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Решение. $P\left(\left|X - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 0{,}9973$, требуется найти интервал $\left(a - \delta,\ a + \delta\right)$. По таблице значений функции Лапласа находим, что $\frac{\delta}{\sigma} = 3$, это вытекает из равенства $\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \frac{0{,}9973}{2} = 0{,}4987$, $\delta = 3\sigma = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$.

Из неравенства $\left|X - 10\right| < 0{,}3$ получаем следующее:

$$-0{,}3 < X - 10 < 0{,}3;\ 10 - 0{,}3 < X < 10 + 0{,}3;$$

Следовательно, искомый интервал: $9{,}7 < X < 10{,}3$.

Пример 2.25. Линия связи обслуживает 1000 абонентов. Каждый абонент разговаривает в среднем 6 минут в час. Сколько каналов должна иметь линия связи, чтобы с практической достоверностью можно было утверждать, что не произойдет ни одной потери вызова?

Решение. Вероятность вызова для каждого абонента равна $p = \frac{6}{60} = 0{,}1$, $q = 1 - p = 0{,}9$, поэтому $a = np = 1000 \cdot 0{,}1$, $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9} = 9{,}5$.

Согласно формуле (69), практически достоверно, что

$$|X - a| < 3\sigma .$$

Отсюда $|X - 100| < 3 \cdot 9{,}5$; $|X - 100| < 28{,}5$; $71{,}5 < X < 128{,}5$.

Для практически безотказной работы линии связи достаточно иметь 130 каналов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения. Найдите $P(35 < X < 40)$, если известно, что $M(X) = 25$ и $p(10 < X < 15) = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

2. При взвешивании получается ошибка, подчиненная нормальному закону распределения с параметром $\sigma = 20$ г. Какова вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей 30 г?

Ответ: 0,866.

3. Автомат изготавливает детали, контролируя их диаметры X. Величина X распределена нормально с параметрами $a = 20$ и $\sigma = 0{,}3$. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры деталей.

Ответ: (19,1; 10,09).

4. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 4$ и $\sigma = 2$.

Найти: а) вероятность попадания X в интервал (3; 7); б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - 4|$ окажется меньше 5.

Ответ: а) 0,6247; б) 0,9876.

5. Найти $P(|X - a| < \sigma)$ для случайной величины X, распределенной по нормальному закону с параметрами a и σ.

Ответ: 0,6827.

Показательное распределение

Показательным распределением называется распределение с плотностью вероятностей, определяемой следующей функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0.\end{cases} \qquad (71)$$

График функции $f(x)$ изображен на рис. 2.11.

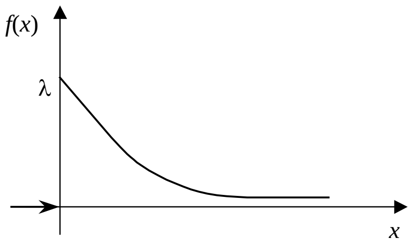

Рис. 2.11

Функция распределения показательного закона:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0.\end{cases} \qquad (72)$$

Вероятность попадания в интервал $(a;\, b)$ равна:

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}. \qquad (73)$$

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Пример 2.26. Написать плотность распределения и функцию распределения показательного закона, если $\lambda = 7$.

Решение.

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 7e^{-7x} & \text{при } x\geq 0.\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 1-e^{-7x} & \text{при } x\geq 0.\end{cases}$$

Пример 2.27. Какова вероятность того, что в результате испытания непрерывная случайная величина *X* попадет в интервал (0,3; 1), если она распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 2e^{-2x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$

Решение. По условию $\lambda=2$, следовательно:

$P(0{,}3<X<1)=e^{-2\cdot 0{,}3}-e^{-2\cdot 1}=e^{-0{,}6}-e^{-2}=0{,}54881-0{,}13534\approx 0{,}41$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать дифференциальную и интегральную функции показательного распределения, если параметр $\lambda=2$.

Ответ: $f(x)=2e^{-2x}$; $F(x)=1-e^{-2x}$ при $x\ge 0$.

2. Случайная величина *X* распределена по показательному закону *f*(*x*) = 0 при *x* < 0; *f*(*X*) = 6e^{-6x} при $x\ge 0$. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и функцию распределения этой случайной величины, а также вероятность попадания значений случайной величины *X* в интервал (0,2; 1,1).

Ответ: $M(X)=1/6$; $D(X)=1/36$; $\sigma(X)=1/6$; $F(x)=1-e^{-6x}$; $P(0{,}2<X<1{,}1)=0{,}512$.

2.7. Функция одной случайной величины

Если каждому возможному значению случайной величины *X* соответствует одно возможное значение случайной величины *Y*, то *Y* называют *функцией случайного аргумента X*: *Y* = φ(*X*).

Если *X* – дискретная случайная величина имеет закон распределения $P(X=x_i)=p_i$ $(i=1,2,...,n)$, тогда функция $Y=\varphi(X)$ имеет значения y_i $(i=1,2,...,n)$, найденные по следующей формуле:

$$y_i=\varphi(x_i) \tag{74}$$

с теми же вероятностями, т. е. $P(Y=y_i)=P(X=x_i)=p_i$ $(i=1,2,...,n)$.

Если некоторым различным значениям x_i будут соответствовать равные значения y_i, то следует складывать вероятности повторяющихся значений *Y*.

Если X – непрерывная случайная величина, заданная дифференциальной функцией $f(x)$, и если $y=\varphi(x)$ – дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x=\psi(y)$, то дифференциальная функция $g(y)$ случайной величины Y находится по равенству:

$$g(y)=f(\psi(y))\left|\psi'(y)\right|. \tag{75}$$

Если функция $y=\varphi(x)$ кусочно монотонная, то следует разбить интервал возможных значений X на такие интервалы, где функция $\varphi(x)$ монотонна, и найти $g_i(y)$ для каждого интервала:

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n} g_i(y). \tag{76}$$

Пример 2.28. Найти закон распределения случайной величины $Y = X^4$, если дискретная случайная величина X задана следующим законом распределения:

X	–1	–2	1	2
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Решение. Найдем возможные значения Y:

$$y_1=(-1)^4=1;\ y_2=(-2)^4=16;\ y_3=1^4=1;\ y_4=2^4=16.$$

Так как $y_1=y_3$ и $y_2=y_4$, следовательно

$$P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)=0{,}3+0{,}2=0{,}5;$$

$$P(Y=8)=P(X=-2)+P(X=2)=0{,}1+0{,}4=0{,}5.$$

Искомый закон распределения величины Y можно представить в виде таблицы

Y	1	16
P	0,5	0,5

Пример 2.29. Задана дифференциальная функция $f(x)$ случайной величины X, возможные значения которой заключены в интервале (1; 3). Найти дифференциальную функцию случайной величины $Y = 3X + 1$.

Решение. Так как функция $y = 3x + 1$ является дифференцируемой и строго возрастает, следовательно

$$\psi(y) = x = \frac{y-1}{3}\,;\ \psi'(y) = \frac{1}{3}\,.$$

Найдем $f(\psi(y))$:

$$f(\psi(y)) = f\left(\frac{y-1}{3}\right).$$

Искомая дифференциальная функция:

$$g(y) = f(\psi(y))\cdot\left|\psi'(y)\right| = f\left(\frac{y-1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\,.$$

Так как x изменяется в интервале (1; 3) и $y = 3x + 1$, то $4 < y < 10$.

Ответ: $g(y) = f\left(\dfrac{y-1}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{3}\,;\ 4 < y < 10$.

Пример 2.30. Найти распределение функции $Y = X^3$, если случайная величина X распределена нормально и ее математическое ожидание равно 0.

Решение. Так как функция $y = x^3$ дифференцируема и строго возрастает, то можно применить формулу (75).

Функция $\psi(y) = x = y^{\frac{1}{3}}$ обратная функции $y = x^3$. Найдем $f(\psi(y))$.

По условию $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, поэтому:

$$f(\psi(y)) = f\left(y^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}},\ \psi'(y) = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}\,.$$

Ответ: $g(y) = \dfrac{1}{3\sigma y^{\frac{2}{3}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}$.

Пример 2.31. Найти математическое ожидание функции $Y = \varphi(X) = X^2 + 1$, если дискретная случайная величина X задана следующим законом распределения:

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

Решение. Найдем возможные значения Y:

$y_1 = \varphi(1) = 1^2 + 1 = 2$; $y_2 = \varphi(3) = 3^2 + 1 = 10$; $y_3 = \varphi(5) = 5^2 + 1 = 26$.

Следовательно, закон распределения величины Y можно представить в виде таблицы

Y	2	10	26
P	0,2	0,5	0,3

Используя формулу $M(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i$ найдем математическое ожидание заданной функции: $M(X^2 + 1) = 2 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}5 + 26 \cdot 0{,}3 = 13{,}2$.

Ответ: $M(X^2 + 1) = 13{,}2$.

Пример 2.32. Найти математическое ожидание функции $Y = \varphi(X) = X^2$, если непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения $f(x) = \sin x$ в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $f(x) = 0$ вне этого интервала.

Решение. $M(\varphi(X)] = M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx$; $M(\varphi(X)] = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$.

Интегрируя по частям, получим: $M(X^2) = \pi - 2$.

Ответ: $M(X^2) = \pi - 2$.

3. СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Двумерной называют случайную величину (X; Y), возможные значения которой есть пары чисел (x; y).

Случайные величины X и Y, рассматриваемые совместно, образуют систему двух случайных величин. Каждую из величин X и Y называют *составляющей* (*компонентой*).

Общей характеристикой двумерной случайной величины является *функция распределения вероятностей*, которая представляет собой вероятность события ($X < x$, $Y < y$); $F(x,y) = P(X < x, Y < y)$.

Различают дискретные (составляющие этих величин дискретны) и непрерывные (составляющие этих величин непрерывны) двумерные случайные величины.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины (т. е. пар чисел) (x_i; y_i) и их вероятностей $p(x_i; y_j)$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$).

Закон распределения двумерной случайной величины может быть задан в виде таблицы с двойным входом, содержащей возможные значения и их вероятности, а также аналитически, например, в виде функции распределения.

Зная закон распределения двумерной дискретной величины, можно найти законы распределения каждой из составляющих.

Например, события ($X = x_1$, $Y = y_1$), ($X = x_1$, $Y = y_2$), …, ($X = x_1$, $Y =$ $= y_m$) несовместны, поэтому

$$P(x_1) = P(x_1, y_1) + P(x_1, y_2) + \ldots + P(x_1, y_m) .$$

Таким образом, вероятность того, что X примет значение x_i, равна сумме вероятностей столбца x_i. Аналогично, сложив вероятности строки y_j, получим вероятность $P(Y = y_j)$.

Пример 3.1. Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины, заданной законом распределения в виде следующей таблицы:

Y \ X	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений X: $P(x_1) = 0{,}16$; $P(x_2) = 0{,}48$; $P(x_3) = 0{,}36$.

Запишем закон распределения составляющей X в форме таблицы:

X	x_1	x_2	x_3
P	0,16	0,48	0,36

Проверка: 0,16 + 0,48 + 0,36 = 1.

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений Y: $P(y_1) = 0{,}60$; $P(y_2) = 0{,}40$.

Запишем закон распределения составляющей Y в виде следующей таблицы:

Y	y_1	y_2
P	0,60	0,40

Проверка: 0,60 + 0,40 = 1.

3.1. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной случайной величины

Условным распределением составляющей X при $Y = y_j$ называют совокупность условных вероятностей $P(x_1|y_j)$, $P(x_2|y_j)$, …, $P(x_n|y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y = y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех возможных значениях X) уже наступило.

Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

Условный закон распределения X в предположении, что событие $Y = y_1$ уже произошло, может быть найден по следующей формуле:

$$P(x_i|y_i) = \frac{P(x_i, y_i)}{P(y_1)} \quad (i = 1,2,\ldots,n)\,. \qquad (77)$$

В общем случае условные законы для составляющей X могут быть представлены в виде формуле

$$P(x_i|y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}\,. \qquad (78)$$

Для составляющей Y условные законы определяются формулой

$$P(y_j|x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)} \quad . \qquad (79)$$

Пример 3.2. Найти условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение y_1 и двумерная случайная величина (X, Y) задана таблицей:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Решение. Используя формулу

$$P(x_i|y_1) = \frac{P(x_i, y_1)}{P(y_1)},$$

где $P(y_1) = 0{,}10 + 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}60$, находим:

$$P(x_1|y_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0{,}10}{0{,}60} = \frac{1}{6};$$

$$P(x_2|y_1) = \frac{P(x_2, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}60} = \frac{1}{2};$$

$$P(x_3|y_1) = \frac{P(x_3, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0{,}20}{0{,}60} = \frac{1}{3}.$$

Для проверки вычислений просуммируем найденные вероятности:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1.$$

Искомый условный закон распределения X может быть записан в виде таблицы

X	x_1	x_2	x_3
$P(X|y_1)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Аналогично найдем условный закон распределения Y, который приведен в виде следующей таблицы:

Y	y_1	y_2
$P(Y\|x_2)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{24}$

Проверка: $\frac{1}{16}+\frac{9}{24}=\frac{30}{48}+\frac{18}{48}=1$.

3.2. Числовые характеристики системы двух случайных величин

Среди числовых характеристик двумерной случайной величины важнейшими являются условное математическое ожидание и ковариация.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X = x$ называется сумма произведений возможных значений Y на их условные вероятности:

$$M(Y|X=x)=\sum_{j=1}^{n} y_j P(y_j|x). \tag{80}$$

Условное математическое ожидание дискретной случайной величины X при $Y = y$ рассчитывается по следующей формуле:

$$M(X|Y=y)=\sum_{i=1}^{m} x_i P(x_i|y). \tag{81}$$

Ковариацией или *корреляционным моментом* случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий:

$$K_{xy}=M\big((X-M_x)(Y=M_y)\big);\ K_{xy}=K_{yx}. \tag{82}$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение ковариации к произведению средних квадратичных отклонений этих величин:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y};\ -1\le r_{xy}\le 1. \tag{83}$$

Корреляционные моменты и дисперсии можно представить в виде корреляционной матрицы:

$$\begin{pmatrix} D(X) & K_{xy} \\ K_{yx} & D(Y) \end{pmatrix}. \qquad (84)$$

Пример 3.3. Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $Y = x_1 = 1$, если дискретная двумерная случайная величина (Y, X) задана следующей таблицей:

Y \ X	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 8$
$y_1 = 3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2 = 6$	0,30	0,10	0,03	0,07

Решение. Найдем $P(x_1) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45$.

$$P(y_1|x_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(x_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{1}{3};$$

$$P(y_2|x_1) = \frac{P(x_1, y_2)}{P(x_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}45} = \frac{2}{3}.$$

Условное математическое ожидание равно:

$$M(Y|X = x_1) = \sum_{j=1}^{2} y_j P(y_j|x_1) = y_1 P(y_1|x_1) + y_2 P(y_2|x_1) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

Пример 3.4. Закон распределения двумерной случайной величины (X, Y) задан в виде следующей таблицы:

Y \ X	1	3	4
2	0,10	0,05	0,12
3	0,20	0,14	0,08
5	0,15	0,11	0,05

Найти следующее:

а) одномерные законы распределения компонент X и Y;

б) корреляционный момент;

в) корреляционную матрицу;

г) коэффициент корреляции.

Решение.

1. Составим одномерные законы распределения X и Y.

Находим вероятности возможных значений X:

$P(X=1)=0{,}10+0{,}20+0{,}15=0{,}45$;

$P(X=3)=0{,}05+0{,}14+0{,}11=0{,}30$;

$P(X=4)=0{,}12+0{,}08+0{,}05=0{,}25$.

Проверка: $0{,}45+0{,}30+0{,}25=1$.

Аналогично находим вероятности возможных значений Y, сложив вероятности по строкам:

$P(Y=2)=0{,}10+0{,}05+0{,}12=0{,}27$;

$P(Y=3)=0{,}20+0{,}14+0{,}08=0{,}42$;

$P(Y=5)=0{,}15+0{,}11+0{,}05=0{,}31$.

Проверка: $0{,}27+0{,}42+0{,}31=1$.

X	1	3	4
P	0,45	0,30	0,25

Y	2	3	5
P	0,27	0,42	0,31

$M(X)=1\cdot 0{,}45+3\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}25=2{,}35$.

$M(Y)=2\cdot 0{,}27+3\cdot 0{,}42+5\cdot 0{,}31=3{,}35$.

$M(X^2)=1\cdot 0{,}45+9\cdot 0{,}3+16\cdot 0{,}25=7{,}15$.

$M(Y^2)=4\cdot 0{,}27+9\cdot 0{,}42+25\cdot 0{,}31=15{,}8$.

$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=7{,}15-2{,}35^2=7{,}15-5{,}52=1{,}63$.

$D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2=15{,}8-3{,}35^2=15{,}8-11{,}22=4{,}58$.

$\sigma_X=\sqrt{D(X)}=1{,}28$; $\sigma_Y=\sqrt{D(Y)}=2{,}14$.

2. Находим корреляционный момент по следующей формуле:

$$K_{XY}=M\big(X-M(X)\big)\big(Y-M(Y)\big).$$

Составляем закон распределения двумерной случайной величины (Y, X) в виде таблицы:

$X - M(X)$ / $Y - M(Y)$	– 1,35	0,65	1,65
– 1,35	0,10	0,05	0,12
– 0,35	0,20	0,14	0,08
1,65	0,15	0,11	0,05

K_{XY} = –1,35(–1,35 · 0,1 + 0,65 · 0,05 + 1,65 · 0,12) – 0,35(–1,35 · 0,2 + + 0,65 · 0,14 + 1,65 · 0,08) + 1,65 · (–1,35 · 0,15 + 0,65 · 0,11 + 1,65 · 0,05) =
= –1,35 · (–0,135 + 0,0325 + 0,138) – 0,35(–0,27 + 0,091 + 0,132) + + 1,65(–0,2025 + 0,0715 + 0,0825) = –0,128 + 0,0165 – 0,08 = 0,19.

3. Записывает корреляционную матрицу:

$$\begin{pmatrix} D(X) & K_{XY} \\ K_{YX} & D(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}63 & -0{,}19 \\ -0{,}19 & 1{,}39 \end{pmatrix}.$$

4. Находим коэффициент корреляции по формуле (83):

$$r_{XY} = \frac{-0{,}19}{1{,}28 \cdot 1{,}18} = -0{,}126.$$

Так как $r_{XY} \neq 0$, величины X и Y являются зависимыми.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти законы распределения составляющих X и Y, если дискретная двумерная случайная величина (X, Y) задана таблицей

X / Y	x_1	x_2	x_3
y_1	0,106	0,062	0,082
y_2	0,116	0,160	0,070
y_3	0,111	0,111	0,182

Ответ:

X	x_1	x_2	x_3
P	0,333	0,333	0,334

Y	y_1	y_2	y_3
P	0,250	0,346	0,404

2. Найти условный закон распределения X при $Y = 0{,}8$, если дискретная двумерная случайная величина (X, Y) задана таблицей:

$Y \backslash X$	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Ответ:

X	2	5	8
$P(X \mid Y = 0{,}8)$	0,25	0,6	0,15

3. Найти законы распределения составляющих X, Y и условный закон распределения Y при $X = 2$, если двумерная случайная величина (X, Y) задана в виде следующей таблицы:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0,12	0,15	0,10
2	0,08	0,10	0,12
3	0,05	0,10	0,18

Ответ:

X	0	1	2
P	0,25	0,35	0,4

Y	1	2	3
P	0,37	0,3	0,33

Y	1	2	3
$P(Y \mid X = 2)$	0,25	0,30	0,45

4. По некоторой цели производится два выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7.

Найти закон распределения системы случайных величин (X, Y), считая, что X – число попаданий, а Y – число промахов.

Ответ:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	0	0,49
1	0	0,42	0
2	0,09	0	0

5. Найти условное математическое ожидание $M(Y|X=1)$, если закон распределения двумерной случайной величины (X, Y) задан в виде таблицы

$Y \backslash X$	–1	0	1
1	0,15	0,30	0,35
2	0,05	0,05	0,10

Ответ: $M(Y|X=1)=0{,}25$, $M(X|Y=2)=2{,}7$.

6. Найти коэффициент корреляции между величинами X и Y, если закон распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) задан в виде следующей таблицы:

$Y \backslash X$	2	5
8	0,15	0,10
10	0,22	0,23
12	0,10	0,20

Ответ: $r_{XY} = 0{,}198$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Решить следующие задачи:

1.1. На предприятии брак составляет в среднем 3 % от общего выпуска изделий. Известно, что изделия высшего сорта составляют 85 % стандартной продукции.

Определить, какова вероятность того, что выбранное наугад изделие из произведенных на этом предприятии будет высшего сорта.

1.2. Из партии втулок, изготовленных за смену токарем, случайным образом отбирается для контроля 10 штук.

Какова вероятность того, что среди отобранных втулок 2 – второго сорта, если во всей партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго?

1.3. Комиссия по качеству раз в месяц проверяет качество продуктов в двух из 30 магазинов, среди которых находятся и два известных вам магазина.

Выяснить, какова вероятность того, что в течение месяца они оба будут проверены.

1.4. Из 5 букв разрезной азбуки составлено слово "песня". Ребенок, не умеющий читать, рассыпал буквы и затем собрал в произвольном порядке.

Какова вероятность того, что у него снова получилось слово "песня"?

1.5. Из 20 акционерных обществ 4 являются банкротами. Гражданин приобрел по одной акции шести акционерных обществ.

Какова вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротных акционерных обществ?

1.6. В группе спортсменов 7 лыжников и 3 конькобежца. Из нее случайным образом выделены 3 спортсмена.

Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены окажутся лыжниками?

1.7. В партии 15 однотипных стиральных машин, 5 из которых изготовлены на заводе А, а 10 – на заводе В. Случайным образом отобрано 5 машин.

Какова вероятность того, что две из них изготовлены на заводе А?

1.8. На полке 6 радиоламп, из которых 2 неисправные. Случайным образом отбираются 2 радиолампы.

Выяснить, какова вероятность того, что отобранные радиолампы являются исправными.

1.9. На склад привезли 50 ящиков комплектующих изделий для одного из видов ЭВМ, но среди них оказалось 4 ящика комплектующих для другого вида ЭВМ. Наудачу взяли 6 ящиков.

Какова вероятность того, что в одном из этих 6 ящиков окажутся некомплектные детали?

1.10. Из стопки, в которой 8 книг и из них 2 – художественные, наугад связи 4 книги.

Какова вероятность того, что хотя бы одна из отобранных книг является художественной?

1.11. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: 4 ящика – с первого, 5 – со второго, 7 – с третьего и 4 ящика – с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи.

Определить, какова вероятность того, что выбранный ящик будет с первого или с третьего склада.

1.12. В запасе ремонтной мастерской 10 поршневых колец, 3 из которых – восстановленные. Наудачу взяли 3 кольца.

Какова вероятность того, что среди взятых колец, 2 окажутся восстановленными?

1.13. В городе находятся 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны 3 магазина.

Какова вероятность того, что отобранные магазины окажутся непродовольственными?

1.14. В группе 8 спортсменов, из них 6 мастеров спорта.

Какова вероятность того, что из двух случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один – мастер спорта?

1.15. В районе 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны 2 поселка.

Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

1.16. Из коробки, содержащей карточки с буквами “о”, “н”, “к”, “ь”, наугад вынимают одну карточку за другой и располагают в порядке извлечения.

Какова вероятность того, что в результате получится слово “конь”?

1.17. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из 3 человек.

Какова вероятность того, что в делегацию войдут две женщины и один мужчина, считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран в ее состав?

1.18. Из пруда, в котором плавают 40 щук, выловили 5 щук, пометили их и пустили обратно в пруд. Во второй раз выловили 9 щук.

Определить, какова вероятность того, что среди них окажутся только две помеченные щуки.

1.19. В бригаде четыре женщины и трое мужчин. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр.

Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется две женщины и двое мужчин?

1.20. Из пяти карточек с буквами “а”, “б”, “в”, “г”, “д” наугад одну за другой выбирают две и располагают их в порядке извлечения.

Выяснить, какова вероятность того, что получится слово “да”.

1.21. Из 10 билетов выигрышными являются 2. Наудачу выбирают 5 билетов.

Какова вероятность того, что среди взятых билетов один окажется выигрышным?

1.22. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Наугад извлекают 2 шара.

Какова вероятность того, что извлеченные шары окажутся черными?

1.23. Гражданин купил билет “Спортлото” и наугад отметил в нем 6 из имеющихся 49 номеров.

Какова вероятность того, что он правильно угадал 3 из 6 номеров, которые будут опубликованы в списке “выигрышных”?

1.24. В мастерскую для ремонта поступило 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер наугад выбирает 5 телевизоров.

Какова вероятность того, что из выбранных 2 телевизора нуждаются в настройке?

1.25. Производится подбрасывание двух игральных костей.

Какова вероятность того, что на обеих костях выпадет равное число очков?

1.26. Определить вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 1 до 30 включительно будет содержать цифру “1”.

1.27. В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 коричневого цвета, а остальные – черного. Произвольно отбирают 8 пар сапог.

Какова вероятность того, что все выбранные сапоги окажутся черного цвета?

1.28. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества случайным образом отобрали 3 шубы.

Какова вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся только мужские или только женские шубы?

1.29. В партии 20 радиоприемников, из них 5 являются неисправными. Наугад берут 3 радиоприемника.

Какова вероятность того, что в число выбранных войдут 1 неисправный и 2 исправных радиоприемника?

1.30. В коробке находится 6 одинаковых по форме и близких по диаметру сверл. Случайным образом сверла извлекаются из коробки.

Выяснить, какова вероятность того, что сверла извлекутся в порядке возрастания их диаметра.

Задание 2. Решить следующие задачи:

2.1. Имеются два ящика, содержащие типовые элементы замены (ТЭЗ). В первом ящике – 25 исправных и 5 неисправных, во втором – 27 исправных и 3 неисправных. Из каждого ящика наугад вынимают по одному ТЭЗ.

Найти вероятность того, что: а) оба ТЭЗ будут исправны; б) только один будет исправным; в) не более одного будет неисправным.

2.2. Два бомбардировщика преодолевают зону ПВО. Вероятность того, что будет сбит первый бомбардировщик, равна 0,7, второй – 0,8.

Найти вероятность: а) уничтожения одного бомбардировщика; б) поражения двух бомбардировщиков; в) промахов.

2.3. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны 0,8; 0,9; 0,7.

Определить, какова вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) три камеры.

2.4. Инженер выполняет расчет, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8.

Определить, какова вероятность того, что интересующие инженера данные содержатся: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

2.5. Стрелок произвел четыре выстрела по удаляющейся от него цели, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1.

Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) четыре раза; б) три раза; в) не менее трех раз.

2.6. На заводе изготавливают железобетонные панели, из которых 90 % высшего сорта.

Найти вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

2.7. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку поступающей информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Известно, что вероятность отказа за некоторое время t каждого из них равна 0,2.

Выяснить, какова вероятность безотказной работы за время t: а) каждого устройства; б) хотя бы одного устройства; в) одного устройства.

2.8. Самолет противника обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,8; 0,7; 0,5.

Найти вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) двумя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

2.9. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны 0,3; 0,2; 0,4.

Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна радиолампа.

2.10. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, высшего качества, равна 0,9, второго – 0,7, третьего – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата.

Определить, какова вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества.

2.11. Первый рабочий изготавливает 40 % изделий второго сорта, а второй – 30 %. У каждого рабочего наугад взято по 2 изделия.

Найти вероятность того, что: а) все 4 изделия второго сорта; б) хотя бы 3 изделия второго сорта; в) менее трех изделий второго сорта.

2.12. В первом ящике – 20 деталей, из которых 15 – стандартные. Во втором ящике – 30 деталей, из которых 25 – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по одной детали.

Найти вероятность того, что: а) обе детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные.

2.13. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для первого станка составляет 1 %, для второго станка – 4 %. С каждого станка взяли по одной детали.

Определить, какова вероятность того, что: а) обе детали стандартные; б) одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные.

2.14. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,6.

Найти вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) не более двух экзаменов.

2.15. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,7. Оба стрелка сделали по одному выстрелу.

Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) один раз?

2.16. Для аварийной сигнализации установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,9, второй – 0,7.

Найти вероятность того, что при аварии: а) сработают оба сигнализатора; б) не сработает ни один сигнализатор; в) сработает хотя бы один сигнализатор.

2.17. Из двух зенитных орудий сделано по одному выстрелу. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4, из второго – 0,5.

Какова вероятность того, что: а) самолет уничтожен двумя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель?

2.18. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9.

Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль будет обнаружен: а) тремя станциями; б) не менее чем двумя станциями; в) ни одной станцией.

2.19. Из всех деталей, находящихся в ящике 50 % изготовленны на заводе № 1, 20 % – на заводе № 2, 30 % – на заводе № 3. Наугад взято 3 детали.

Найти вероятность того, что: а) все детали с завода № 1; б) 2 детали с завода № 1; в) все 3 детали с разных заводов.

2.20. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6.

Найти вероятность успешного преодоления: а) трех препятствий; б) не менее двух препятствий; в) двух препятствий.

2.21. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени t первого блока равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6, четвертого – 0,4.

Определить, какова вероятность того, что в течение времени t будут работать: а) все 4 блока; б) 3 блока; в) не менее трех блоков.

2.22. Независимо друг от друга работают 3 станка. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1, второй – 0,2 третий – 0,2.

Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) не менее двух станков; б) 2 станка; в) 3 станка.

2.23. Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпуска равна 0,2, второго – 0,3. Имеется по 2 билета каждого выпуска.

Какова вероятность того, что выигрышными окажутся: а) 3 билета; б) не менее трех билетов; в) менее трех билетов?

2.24. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, будет высшего качества, равна 0,7, вторым – 0,8, третьим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим.

Какова вероятность того, что высшего качества будут: а) все подшипники; б) 2 подшипника; в) хотя бы один подшипник?

2.25. В первой коробке находится 20 деталей, из которых 13 являются стандартными; во второй – 30, из которых 26 стандартные. Из каждой коробки наугад берут по одной детали.

Найти вероятность того, что: а) обе детали окажутся нестандартными; б) одна деталь нестандартная; в) обе детали стандартные.

2.26. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, соответственно равна 0,2; 0,3; 0,1.

Определить, какова вероятность того, что включены: а) 2 электродвигателя; б) хотя бы один электродвигатель; в) 3 электродвигателя.

2.27. На сборку поступают детали с трех станков. Первый станок дает 20 % однотипных деталей, второй – 30, третий – 50 % деталей, поступающих на сборку.

Найти вероятность того, что из трех наугад взятых деталей: а) три с разных станков; б) три с третьего станка; в) две с третьего станка.

2.28. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,7, вторым – 0,5. Оба стрелка сделали по одному выстрелу.

Выяснить, какова вероятность того, что цель будет поражена: а) двумя стрелками; б) хотя бы одним стрелком; в) только одним стрелком.

2.29. Первый станок-автомат выпускает 1 % брака, второй – 1,5, третий – 2 %. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка.

Найти вероятность того, что стандартными окажутся: а) три детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь.

2.30. Три команды спортивного общества А состязаются соответственно с тремя командами общества В. Вероятности выигрыша первой, второй и третьей команд из общества А у соответствующих команд из общества В равны 0,7; 0,6; 0,4. Команды провели по одной встрече.

Какова вероятность того, что команды общества А выигрывают: а) две встречи; б) хотя бы две встречи; в) три встречи?

Задание 3. Решить следующие задачи:

3.1. Три оператора радиолокационной установки производят соответственно 25, 35 и 40 % всех измерений, допуская при этом 5, 4 и 2 % ошибок.

1. Определить вероятность проведения ошибочного измерения для установки в целом?

2. Найти вероятность того, что ошибочное случайно проведенное измерение принадлежит третьему оператору.

3.2. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 стрелка – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок производит выстрел по мишени.

1. Найти вероятность того, что произойдет попадание.

2. Если известно, что стрелок попал в мишень, то следует найти вероятность того, что он принадлежит к первой группе стрелков, попадающих с вероятностью 0,8.

3.3. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятность выполнить норму мастера спорта для студентов первой группы равна 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2.

Найти вероятность того, что: а) наугад выбранный студент выполнит норму матера спорта; б) студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе.

3.4. На сортировочную станцию прибывают полувагоны, платформы и крытые вагоны с вероятностями 0,25, 0,3 и 0,45 соответственно. Вероятность неисправности полувагона равна 0,02; платформы – 0,015; крытого вагона – 0,01.

1. Найти вероятность того, что поступивший на осмотр вагон окажется неисправным.

2. Если поступивший на осмотр вагон оказался неисправным, то следует найти вероятность того, что этот вагон является платформой.

3.5. Электролампы изготавливаются на двух заводах. Первый завод производит 60 % от общего количества электроламп, второй – 40 %. Известно, что 70 % продукции первого завода и 80 % второго являются изделиями высшего качества. В магазин поступает продукция обоих заводов.

1. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа окажется высшего сорта?

2. Если купленная лампа оказалась высшего сорта, то следует определить, какова вероятность того, что она изготовлена на первом заводе.

3.6. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой коробке находится 20 конденсаторов, из которых 2 – неисправных, во второй – 10, из которых 3 – неисправных.

1. Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию.

2. Если наугад взятый конденсатор оказался годным, то необходимо определить, из какой коробки он вероятнее всего взят.

3.7. Самолет может выполнять задания на больших, средних и малых высотах, причем на больших высотах предполагается совершить 25 % всех полетов, на средних – 10 и на малых – 65 %. Вероятности выхода самолета на заданный объект на больших, средних и малых высотах соответственно равны 0,75; 0,9; 0,95.

1. Найти вероятность выхода самолета на заданный объект.

2. При условии выхода самолета на заданный объект определить, какова вероятность того, что полет происходил на малой высоте.

3.8. Прибор может работать в трех режимах: нормальном, форсированном и недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 50 % случаях работы прибора, форсированный – в 30, недогруженный – в 20 %. Надежность прибора (вероятность безотказной работы в течение заданного времени t) для нормального режима равна 0,8, для форсированного – 0,5, для недогруженного – 0,9.

1. Найти полную надежность прибора.

2. Если прибор проработал безотказно в течение времени t, то следует найти вероятность того, что он работал в форсированном режиме.

3.9. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести других ящиках с 20 шарами в каждом – по 4 красных шара.

Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наугад взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков.

3.10. На предприятии изготовляются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 20 % изделий от всего объема их производства, на второй – 30, на третьей – 50 %. Процент годности изделий для каждой из линий равен 95, 98 и 97 соответственно.

1. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

2. Если выбранное наугад изделие оказалось бракованным, то следует определить на какой линии оно скорее всего изготовлено.

3.11. В канцелярии работают 4 секретаря, которые обрабатывают соответственно по 40, 10, 30 и 20 % исходящих документов за одно и то же время. Вероятности неверной адресации документов секретарями равны 0,01, 0,04, 0,06, 0,02 соответственно.

1. Найти вероятность того, что наугад выбранный исходящий из канцелярии документ будет неверно адресован.

2. Найти вероятность того, что документ, оказавшийся неверно адресованным, отправлен третьим секретарем.

3.12. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 – второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7.

Какова вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произошло сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошел сбой, первого типа?

3.13. Сообщение может передаваться по одному из десяти каналов связи, 2 из которых находятся в отличном состоянии, 5 – в хорошем и 3 – в посредственном. Вероятности правильной передачи сообщения для каналов указанных видов равны 0,95, 0,9, 0,7 соответственно. По выбранному наугад каналу передано сообщение.

1. Найти вероятность того, что оно будет передано без искажений.

2. Если посланное сообщение передано без искажений, то следует найти вероятность того, что оно посылалось по каналам, находящимся в хорошем состоянии.

3.14. В телевизионном ателье имеется 2 кинескопа первого типа и 8 кинескопов второго типа. Вероятности выдержать гарантийный срок для кинескопов первого и второго типов равны 0,9 и 0,6 соответственно.

1. Найти вероятность того, что выбранный наугад кинескоп выдержит гарантийный срок.

2. Если выбранный наугад кинескоп выдержал гарантийный срок, то необходимо найти вероятность того, что это был кинескоп первого типа.

3.15. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка составляет 0,03, для второго – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на первом станке, вдвое больше, чем на втором станке.

Выяснить, какова вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке.

3.16. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными 0,2; 0,3 и 0,5. Вероятность получения бракованной продукции при обработке на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01.

1. Найти вероятность того, что случайно выбранная после обработки деталь окажется стандартной.

2. Если случайно выбранная деталь оказалась стандартной, то нужно определить, какова вероятность того, что она обрабатывалась на втором станке.

3.17. Для поиска спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 – второго. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, вертолет второго типа – с вероятностью 0,7.

1. Найти вероятность того, что выбранный наугад вертолет обнаружит аппарат.

2. Если вертолет обнаружил спускаемый аппарат, то необходимо найти вероятность того, что это был вертолет второго типа.

3.18. Комплектовщик получает для сборки 30 % деталей с завода № 1, 20 % – с завода № 2, остальные – с завода № 3. Вероятность того, что деталь с завода № 1 – высшего качества, равна 0,9, с завода № 2 – 0,8, с завода № 3 – 0,6.

Найти вероятность того, что: а) случайно взятая деталь окажется высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе № 2.

3.19. По линии связи могут передаваться сигналы типа A и B с вероятностями 0,8 и 0,2 соответственно. В среднем, принимается 60 % сигналов типа A и 70 % – типа B. По линии связи передается один сигнал.

1. Какова вероятность того, что этот сигнал будет принят?

2. Если переданный сигнал принят, то следует найти вероятность того, что это был сигнал типа A.

3.20. Радиолокационная станция ведет наблюдения за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помехи, то он обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью 0,8, если применяет – то с вероятностью 0,4. Известно, что объект применяет помехи в 70 % случаев работы.

1. Найти вероятность обнаружения объекта радиолокационной станцией.

2. Если объект обнаружен радиолокационной станцией, то следует найти вероятность того, что это произошло при применении объектом помех.

3.21. Три автомата изготавливают однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата высшего качества, равна 0,8, со второго – 0,6, с третьего – 0,7.

Найти вероятность того, что: а) наугад взятая деталь окажется высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом.

3.22. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 10 – второго. Гарантийный срок обычно выдерживают 80 % радиоламп первого типа и 90 % – второго.

1. Определить, какова вероятность того, что выбранная наугад в составе блока радиолампа выдержит гарантийный срок.

2. Найти вероятность того, что радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа.

3.23. Из высококачественных деталей собирается 40 % приборов, остальные – из деталей обычного качества. В первом случае надежность прибора (вероятность безотказной работы за время t) равна 0,9. Если прибор собран из обычных деталей, то его надежность равна 0,6.

1. Определить, какова надежность наугад выбранного прибора.

2. Если прибор в течение времени t работал безотказно, то следует найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

3.24. Из общего количества поступивших на сборку деталей 30 % привезены с завода № 1, остальные – с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1 равна 0,02, для завода № 2 – 0,03.

Найти: а) вероятность того, что наугад взятая деталь окажется стандартной; б) вероятность изготовления наугад взятой детали на заводе № 1, если она оказалась стандартной.

3.25. В тире имеются 5 ружей, вероятности попадания из которых соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9.

1. Определить вероятность поражения мишени выстрелом из наугад выбранного ружья.

2. Если выстрелом из наугад взятого ружья мишень поражена, то необходимо определить вероятность того, что это было ружье, вероятность попадания из которого равна 0,9.

3.26. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, равны 0,4 и 0,6 соответственно. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7.

1. Найти вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии.

2. Если индикатор сработал, то следует определить, к какому типу он вероятнее всего принадлежит.

3.27. С применением микромодулей монтируется 20 % приборов, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодулей равна 0,9, интегральных схем – 0,8.

Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор был смонтирован с микромодулем, если он оказался исправным.

3.28. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность получения бракованной продукции составляет 0,02, на втором – 0,03.

1. Найти вероятность того, что выбранное случайным образом после обработки изделие окажется стандартным.

2. Если наугад взятое после обработки изделие оказалось стандартным, то следует найти вероятность того, что оно обрабатывалось на первом станке.

3.29. Пассажир может обратиться за получением билета на одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6, для касс вокзала B эта вероятность равна 0,5.

1. Выяснить, какова вероятность того, что пассажир сможет купить билет в наугад выбранной кассе.

2. Если пассажир приобрел билет, то необходимо определить вероятность того, что он куплен в кассе вокзала A.

3.30. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, равными 0,2, 0,3, 0,5 соответственно. Вероятность брака на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01.

Найти: а) вероятность того, что случайно взятая после обработки деталь окажется стандартной; б) вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной.

Задание 4. Решить следующие задачи:

4.1. В семье четверо детей. Принимая равновероятностными событиями рождение мальчика или девочки, найти вероятность того, что мальчиков в семье: а) три; б) не менее трех.

4.2. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80 %.

Определить, какова вероятность того, что из семи посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

4.3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки равна 0,3. Произведено 6 выстрелов.

Найти вероятность того, что произошло: а) три попадания в цель; б) не менее пяти попаданий.

4.4. При передаче сообщения вероятность искажения каждого знака равна 0,1.

Найти вероятность того, что сообщение из десяти знаков: а) не будет искажено; б) содержит не более трех искажений.

4.5. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность получения брака при формовке равна 0,1.

Найти вероятность того, что среди восьми диодов, проверяемых ОТК, окажется: а) 2 бракованных; б) не более двух бракованных.

4.6. Вероятность потопить судно одной торпедой равна 0,2. Выпущено 5 торпед.

Какова вероятность того, что имеет место: а) 3 попадания в судно; б) не менее трех попаданий?

4.7. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7.

Рассчитать вероятность успешной сдачи: а) только трех экзаменов; б) не менее двух экзаменов.

4.8. Вероятность поражения мишени данным стрелком при одном выстреле в среднем составляет 80 %. Стрелок производит 6 выстрелов.

Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) 5 раз; б) не менее пяти раз.

4.9. Вероятность поражения цели каждым из семи выстрелов равна 0,8.

Определить вероятность поражения цели: а) двумя выстрелами; б) хотя бы одним выстрелом.

4.10. Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % не удовлетворяют требованиям стандарта.

Найти вероятность того, что среди шести заготовок, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют: а) не более двух заготовок; б) две заготовки.

4.11. В партии хлопка около 20 % коротких волокон.

Какова вероятность того, что при случайном отборе десяти волокон число коротких будет: а) равно трем; б) не более трех?

4.12. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,8.

Найти вероятность того, что из шести изделий контроль пройдут: а) 5 изделий; б) не менее пяти изделий.

4.13. Всхожесть семян лимона составляет 80 %.

Найти вероятность того, что из девяти посеянных семян взойдут: а) 7 семян; б) более семи.

4.14. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Произведено 7 выстрелов.

Найти вероятность того, что имело место: а) 6 поражений цели; б) не более шести поражений.

4.15. Продукция, поступающая из цеха в ОТК, не удовлетворяет условиям стандарта в среднем в 8 % случаев.

Найти вероятность того, что из наугад взятых семи изделий число изделий, которые не удовлетворяют условиям стандарта, будет равно: а) 6 изделий; б) не менее шести изделий.

4.16. Контрольное задание состоит из пяти вопросов, на каждый из которых дается 4 варианта ответа.

Выяснить, какова вероятность того, что учащийся, не знающий ответов ни на один из вопросов и выбирающий их наугад, даст: а) 3 правильных ответа; б) не менее трех правильных ответов?

4.17. При игре с определенным противником вероятность выигрыша в каждой шахматной партии для данного игрока равна 0,5.

Найти вероятность того, что он выиграет у этого противника в серии из шести партий: а) хотя бы один раз; б) 3 раза.

4.18. После зубофрезеровки шестерен у рабочего в среднем получается 20 % нестандартных шестерен.

Найти вероятность того, что среди взятых шести шестерен нестандартных будет: а) 3 шестерни; б) не более трех.

4.19. В результате наблюдений, продолжавшихся многие годы, установлено, что на каждую тысячу новорожденных приходится в среднем 515 мальчиков и 485 девочек. В некоторой семье шестеро детей.

Определить, какова вероятность того, что среди них: а) 3 девочки; б) не менее двух девочек.

4.20. Контрольное задание состоит из десяти вопросов, предусматривающих ответы “да” или “нет”. Предположим, учащийся не знает ответ ни на один из вопросов и выбирает ответы наугад.

Найти вероятность того, что он даст: а) не менее восьми правильных ответов, необходимых для зачета задания; б) только 6 правильных ответов.

4.21. Оптовая база обслуживает 6 магазинов. Вероятность получения заявки базой на данный день для каждого из магазинов равна 0,6.

Найти вероятность того, что в этот день будет: а) 5 заявок; б) не менее пяти заявок.

4.22. Вероятность того, что изделие успешно пройдет контроль, равна 0,8.

Найти вероятность того, что из шести выбранных наугад изделий контроль пройдут: а) не менее пяти изделий; б) не более пяти изделий.

4.23. Транзисторный радиоприемник смонтирован на девяти полупроводниках, для каждого из которых вероятность наличия брака равна 0,05.

Какова вероятность того, что: а) хотя бы один из полупроводников будет бракованным; б) приемник будет содержать не менее двух бракованных полупроводников?

4.24. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80 % – высшего сорта.

Найти вероятность того, что среди пяти изделий: а) хотя бы 4 высшего сорта; б) 4 высшего сорта.

4.25. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % бракованных.

Выяснить, какова вероятность того, что среди взятых на контроль пяти деталей окажутся: а) две бракованные; б) не более одной бракованной.

4.26. Волокна хлопка определенного сорта, в среднем на 75 % имеют длину, меньшую 45 мм, и на 25 % – большую или равную 45 мм. Наугад выбираются 10 волокон.

Найти вероятность того, что среди выбранных волокон: а) не менее трех имеют длину, большую или равную 45 мм; б) не более одного волокна имеет длину больше, чем 45 мм?

4.27. В телеателье имеется 7 телевизоров. Для каждого телевизора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,6.

Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) 4 телевизора; б) хотя бы один телевизор.

4.28. При штамповке изделий бывает в среднем 20 % брака. Для контроля отобрано 8 изделий.

Какова вероятность того, что: а) не менее двух изделий окажутся бракованными; б) только одно изделие бракованное?

4.29. В автопарке предприятия имеется 12 автомашин. Известно, что для каждого из автомобилей вероятность работы без простоев из-за ремонта в течение месяца равна 0,7.

Найти вероятность того, что в течение ближайшего месяца проработают без простоев: а) не менее 10 автомашин; б) не более двух машин.

4.30. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8.

Определить, какова вероятность того, что экзамен сдадут: а) 5 студентов; б) не менее пяти студентов.

Задание 5. Решить следующие задачи:

5.1. Вероятность производства бракованной детали равна 0,08.

Найти вероятность того, что среди взятых на проверку 1000 деталей окажутся: а) 100 бракованных; б) не более 100 бракованных.

5.2. Станок состоит из 2000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение года равна 0,5.

Какова вероятность отказа в течение года: а) 150 узлов; б) не более 50 узлов?

5.3. Вероятность появления события А в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7.

Рассчитать вероятность того, что событие А наступит: а) не менее 1470 раз и не более 1500 раз; б) ровно 120 раз.

5.4. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3.

Найти вероятность того, что для 800 заготовок число бракованных колец: а) окажется равным 240; б) будет заключено между 225 и 250.

5.5. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,85.

Найти вероятность того, что из 500 высеянных семян взойдет: а) 425 семян; б) от 425 до 450 семян.

5.6. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12.

Вычислить вероятность того, что из 460 наблюдаемых телевизоров: а) более 360 отработают гарантийный срок; б) ровно 400 будут работать без сбоя.

5.7. Известно, что при посадке деревьев определенного вида приживается 80 % саженцев.

Найти вероятность того, что из 400 посаженных деревьев: а) приживутся ровно 300; б) приживутся не менее 300.

5.8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8.

Выяснить, какова вероятность того, что в серии из 100 выстрелов мишень будет поражена: а) ровно 90 раз; б) не менее 75 раз.

5.9. Вероятность появления события А в каждом из 2000 независимых испытаний равна 0,7.

Найти вероятность того, что событие А наступит: а) не менее 1500 раз; б) ровно 1000 раз.

5.10. Вероятность рождения мальчика равна 0,515.

Определить вероятность того, что среди 1000 рождающихся детей: а) будет ровно половина мальчиков; б) мальчиков будет не менее 500 и не более 550.

5.11. Всхожесть семян данного растения равна 0,9.

Найти вероятность того, что среди 900 посаженных семян число проросших будет равно: а) 800; б) не менее 790 и не более 830.

5.12. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,85.

Какова вероятность того, что при 50 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 35 раз; б) 40 раз?

5.13. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,4.

Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет: а) на 60 веретенах; б) не менее чем на 50 веретенах.

5.14. Вероятность отклонений от принятого стандарта при штамповке клемм равна 0,02.

Вычислить вероятность наличия в партии из 200 клемм: а) ровно 50 клемм, не соответствующих стандарту; б) не более 40 нестандартных клемм.

5.15. Посажено 600 семян кукурузы. Вероятность прорастания для каждого из семян равна 0,9.

Определить вероятность того, что число проросших семян: а) больше 400; б) равно 500.

5.16. Вероятность того, что пара обуви, взятая из изготовленной партии, окажется высшего сорта, равна 0,4. На контроль поступило 600 пар обуви.

Найти вероятность того, что число пар обуви высшего сорта будет: а) от 228 до 252 включительно; б) равно 300.

5.17. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8.

Рассчитать вероятность поражения мишени: а) 75 раз в серии из 100 выстрелов; б) не менее 75 раз при 100 выстрелах.

5.18. Прядильщица обслуживает 2000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,04.

Определить, какова вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет: а) на 100 веретенах; б) не более, чем на 150 веретенах.

5.19. Вероятность остановки в течение часа каждой из 100 работающих машин равна 0,2.

Найти вероятность остановки в течение ближайшего часа работы: а) 30 машин; б) не менее 20 машин.

5.20. В передаваемой по каналу связи последовательности знаков, образующих сообщение, любой знак из-за помех, независимо от других, искажается с вероятностью 0,2.

Найти вероятность того, что в переданной последовательности из 1000 знаков число искажений будет равно: а) не менее 100; б) не более 200.

5.21. Вероятность того, что выбранное изделие окажется высшего сорта, равна 0,5.

Найти вероятность того, что из 1000 изделий число изделий высшего сорта будет равно: а) 500; б) не менее 300.

5.22. Промышленная телевизионная установка содержит 2000 транзисторов. В течение гарантийного срока вероятность выхода из строя каждого из транзисторов равна 0,05.

Определить, какова вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока: а) хотя бы одного транзистора; б) не менее 30 транзисторов.

5.23. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,2. Проверяется книга, содержащая 500 страниц.

Найти вероятность того, что с опечатками окажутся: а) 50 страниц; б) не более 50 страниц.

5.24. Автоматическая штамповка клемм для предохранителей дает 10 % отклонений от принятого стандарта.

Найти вероятность того, что среди 400 клемм число стандартных будет равно: а) 90; б) не менее 100.

5.25. Из всех изготавливаемых на заводе кинескопов для телевизоров 20 % не выдерживают гарантийный срок службы.

Найти вероятность того, что в партии из 600 кинескопов число не выдержавших этот срок будет равно: а) 115; б) заключено в промежутке между 100 и 125.

5.26. На заводе работают 500 человек. Для каждого из рабочих вероятность невыхода из-за болезни в определенный день равна 0,1.

Какова вероятность того, что число отсутствующих будет равно: а) не более 40; б) 50 человек?

5.27. Всхожесть семян данного растения равна 0,9.

Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет: а) заключено между 790 и 830; б) 800 семян.

5.28. Мастерская по гарантийному ремонту телевизоров обслуживает 2000 абонентов. Для каждого из купленных телевизоров вероятность поломки в течение гарантийного срока равна 0,3.

Найти вероятность того, что гарантийного ремонта потребуют: а) не более 550 телевизоров; б) 800 телевизоров.

5.29. Аппаратура состоит из 1000 элементов. Для каждого из элементов вероятность отказа в течение времени t равна 0,1 и не зависит от работы других элементов.

Найти вероятность отказа в течение времени t: а) 100 элементов; б) не менее 150 элементов.

5.30. Производство изделий дает 1 % брака.

Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий бракованных будет: а) не более 17; б) ровно 20 изделий?

Задание 6. Для определенной в условии задачи дискретной случайной величины необходимо выполнить следующее:

1. Построить ряд распределения и многоугольник распределения.
2. Найти функцию распределения и построить ее график.
3. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

6.1. Среди 10 лотерейных билетов имеется 6 билетов с выигрышем. Наудачу покупают 4 билета. Случайная величина X – число выигрышных билетов среди купленных.

6.2. Баскетболист делает 3 штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Случайная величина X – число попаданий мяча в корзину.

6.3. В партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 куртки. Случайная величина X – число дефектных курток среди купленных.

6.4. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение представлено 3 баланса предприятия. Случайная величина X – число положительных заключений на проверяемые балансы.

6.5. Вероятность сбоя в работе АТС равна 0,1. Поступило 5 вызовов. Случайная величина X – число сбоев в работе АТС.

6.6. Партия содержит 20 телевизоров, среди которых 6 имеет дефект. Купили 3 телевизора. Случайная величина X – число исправленных телевизоров среди купленных.

6.7. Производится 3 независимых измерения исследуемого образца. Вероятность допустить ошибку в каждом измерении равна 0,05. Случайная величина X – число ошибок, допущенных в измерениях.

6.8. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение с вероятностью 0,5. Случайная величина X – число светофоров, пройденных машиной без остановки.

6.9. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает 2/3 своих изделий первым сортом и 1/3 – вторым. Случайная величина X – число изделий первого сорта среди взятых наугад четырех изделий.

6.10. Из партии в количестве 20 изделий, среди которых имеется 6 бракованных. Для проверки качества случайным образом выбраны 3 изделия. Случайная величина X – число бракованных изделий среди отобранных.

6.11. Вероятность успешной сдачи данного экзамена для каждого из четырех студентов равна 0,8. Случайная величина X – число студентов, успешно сдавших экзамен.

6.12. В урне 20 шаров, из них 6 имеют дефект. Наудачу отбирают 4 шара. Случайная величина X – число бездефектных шаров среди отобранных.

6.13. Товаровед осматривает 10 изделий. Вероятность появления бракованного изделия в партии равна 0,2. Случайная величина X – число появлений стандартных изделий в партии.

6.14. Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Случайная величина X – число правильных ответов на предложенные 3 вопроса курса.

6.15. В урне 5 красных и 4 синих шаров. Отбирают 3 шара. Случайная величина X – число шаров красного цвета среди отобранных.

6.16. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Случайная величина X – количество мальчиков в семье из четырех детей.

6.17. В партии 8 деталей, из которых 4 – стандартные. Наудачу отобрано 4 детали. Случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных.

6.18. Студент знает 20 из 25 вопросов. Случайная величина X – число правильных ответов на предложенные четыре вопроса программы курса.

6.19. В урне 15 шаров, из них 5 – красных, 10 – белых и 5 – зеленых. Наудачу отбирают 3 шара. Случайная величина X – число красных шаров среди отобранных.

6.20. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Случайная величина X – число попаданий при четырех выстрелах.

6.21. В ящике содержатся 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу берет 3 детали. Случайная величина X – число окрашенных деталей среди отобранных.

6.22. В группе 20 студентов, из них 40 % юношей. Вызывают 5 студентов одновременно. Случайная величина X – число юношей среди вызванных студентов.

6.23. В урне 15 шаров, среди которых 10 красных. Наудачу извлекают 4 шара. Случайная величина X – число красных шаров среди отобранных.

6.24. Монету бросают 6 раз. Случайная величина X – число появления герба.

6.25. Партия из 20 изделий содержит 5 бракованных. Из партии выбирают 5 изделий. Случайная величина X – число бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

6.26. В урне 10 шаров, из которых 8 окрашены. Наудачу отобраны 3 шара. Случайная величина X – число окрашенных шаров в случайной выборке.

6.27. Вероятность отказа элементов некоторого устройства равна 0,9. Случайная величина X – число отказов элементов устройства в пяти независимых испытаниях.

6.28. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад извлекают 4 шара. Случайная величина X – число вынутых белых шаров.

6.29. Имеется 3 базы с независимым снабжением. Вероятность отсутствия на базе нужного товара равна 0,1. Предприниматель решил закупить мелкий товар. Случайная величина X – число баз, на которых в данный момент этот товар отсутствует.

6.30. Бросают 4 игральные кости. Случайная величина X – число выпадения одного очка.

Задание 7. Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией распределения вероятностей $F(x)$.

Требуется выполнить следующее:

1. Найти функцию плотности распределения данной случайной величины $f(x)$.
2. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.
3. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее кадратическое отклонение случайной величины.
4. Найти вероятность того, что данная случайная величина примет значение, принадлежащее отрезку $[a; b]$.

7.1. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 1, \\ (x^2-x)/2 \text{ при } 1<x\le 2, \\ 1 \text{ при } x>2. \end{cases}$

$a=\dfrac{3}{2};\ b=\dfrac{3}{4}.$

7.2. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0, \\ x^2/49 \text{ при } 0<x\le 7, \\ 1 \text{ при } x>7. \end{cases}$

$a=3;\ b=6.$

7.3. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{2\sin x}{\sqrt{3}} \text{ при } 0<x\le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1 \text{ при } x>\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

7.4. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{x^3}{1000} \text{ при } 0<x\le 10, \\ 1 \text{ при } x>10. \end{cases}$

$a=0;\ b=6.$

$a=\frac{\pi}{6}$; $b=\frac{\pi}{4}$.

7.5. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1,\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \text{ при } -1\le x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$

$a=0$; $b=1$.

7.6. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -\frac{\pi}{4},\\ \cos 2x \text{ при } -\frac{\pi}{4}<x\le 0,\\ 1 \text{ при } x>0.\end{cases}$

$a=-\frac{\pi}{6}$; $b=0$.

7.7. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x^2/64 \text{ при } 0<x\le 8,\\ 1 \text{ при } x>8.\end{cases}$

$a=1$; $b=7$.

7.8. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x/4 \text{ при } 0<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$

$a=1$; $b=3$.

7.9. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -\pi,\\ \cos\frac{x}{2} \text{ при } -\pi<x\le 0,\\ 1 \text{ при } x>0.\end{cases}$

$a=-\frac{\pi}{3}$; $b=-\frac{\pi}{2}$.

7.10. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ 3x^2+2x \text{ при } 0<x\le \frac{1}{3},\\ 1 \text{ при } x>\frac{1}{3}.\end{cases}$

$a=1/8$; $b=2/7$.

7.11. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<2,\\ \frac{1}{2}x-1 \text{ при} 2\le x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$

$a=2$; $b=3$.

7.12. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \sin\frac{x}{2} \text{ при } 0<x\le \pi,\\ 1 \text{ при } x>\pi.\end{cases}$

$a=\pi/3$; $b=\pi/2$.

7.13. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ (x-2)^2 \text{ при} 2<x\le 3,\\ 1 \text{ при } x>3.\end{cases}$

$a=1$; $b=2{,}5$.

7.14. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \sin 2x \text{ при } 0<x\le \pi/4,\\ 1 \text{ при } x>\pi/4.\end{cases}$

$a=\pi/6$; $b=\pi/4$.

7.15. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2} \text{ при } 1\le x\le 3,\\ 1 \text{ при } x>3.\end{cases}$

$a=1;\ b=2$.

7.16. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<4,\\ \dfrac{1}{2}x-2 \text{ при } 4\le x\le 6,\\ 1 \text{ при } x>6.\end{cases}$

$a=3;\ b=5$.

7.17. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1,\\ x^2-1 \text{ при } -1\le x\le \sqrt{2},\\ 1 \text{ при } x>\sqrt{2}.\end{cases}$

$a=0;\ b=1$.

7.18. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x \text{ при } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 1 \text{ при } x>0.\end{cases}$

$a=-\pi/4;\ b=\pi/4$.

7.19. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x^2/36 \text{ при } 0<x\le 6,\\ 1 \text{ при } x>6.\end{cases}$

$a=1;\ b=5$.

7.20. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x^3 \text{ при } 0<x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$

$a=0{,}5;\ b=1$.

7.21. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x^2/25 \text{ при } 0<x\le 5,\\ 1 \text{ при } x>5.\end{cases}$

$a=2;\ b=4$.

7.22. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \sin x \text{ при } 0<x\le \pi/2,\\ 1 \text{ при } x>\pi/2.\end{cases}$

$a=\pi/4;\ b=\pi/3$.

7.23. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x^2/81 \text{ при } 0<x\le 9,\\ 1 \text{ при } x>9.\end{cases}$

$a=2;\ b=7$.

7.24. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1,\\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{1}{3} \text{ при } 1\le x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$

$a=1;\ b=2$.

7.25. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x^2/16 \text{ при } 0<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$

7.26. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<2,\\ \dfrac{x}{2}-1 \text{ при } 2\le x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$

$a = 1;\ b = 3$.

$a = 2;\ b = 3$.

7.27. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ x^3/27 \text{ при } 0 < x \le 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

$a = 1;\ b = 2$.

7.28. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 3, \\ \dfrac{1}{3}x - 1 \text{ при } 3 < x \le 6, \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$

$a = 4;\ b = 5$.

7.29. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x^2/9 \text{ при } 0 < x \le 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

$a = 1;\ b = 2$.

7.30. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \dfrac{x}{5} \text{ при } 0 < x \le 5, \\ 1 \text{ при } x > 5. \end{cases}$

$a = 2;\ b = 3$.

Задание 8. Решить следующие задачи:

8.1. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку, равную 5 м, и среднее квадратическое отклонение случайной ошибки – 75 м. Возникающие ошибки распределены по нормальному закону. Найти вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м.

8.2. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны 12 и 2 соответственно. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (14; 16).

8.3. Производят взвешивание вещества без систематических ошибок. Случайная ошибка взвешивания распределена нормально с математическим ожиданием, равным 20 кг и средним квадратическим отклонением – 2 кг. Найти вероятность того, что следующее взвешивание отличается от математического ожидания не более, чем на 10 г.

8.4. Детали, выпускаемые цехом, имеют диаметры, которые распределены по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 5 см, и дисперсией – 0,81 см^2. Найти вероятность того, что диаметр наугад взятой детали имеет размер от 4 до 7 см.

8.5. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Рассчитать вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м.

8.6. Случайная величина X распределена по нормальному закону, математическое ожидание равно 20, а среднее квадратическое отклонение – 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,9972 попадет случайная величина X.

8.7. Станок-автомат изготавливает валики, причем контролируется их диаметр X. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10 мм, и средним квадратическим отклонением 0,1 мм. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

8.8. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0. Вероятность попадания этой случайной величины в интервал (–1; 1) равна 0,5. Найти среднее квадратическое отклонение и записать нормальный закон распределения случайной величины X.

8.9. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашни составляет 80 кг, а среднее квадратическое отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98.

8.10. При взвешивании на весах допускаются случайные ошибки с дисперсией, равной 100 г^2, и систематической ошибкой, равной 20 г. Полагая, что ошибки распределены по нормальному закону, определить вероятность того, что ошибка при взвешивании предмета по абсолютной величине не превысит 50 г.

8.11. При определении расстояния радиолокатором случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Найти вероятность того, что ошибка при определении расстояния не превысит 20 м, если известно, что систематических ошибок радиолокатор не допускает, а дисперсия случайных ошибок равна 1370 м^2.

8.12. Случайная величина X нормально распределена с математическим ожиданием, равным 40, и дисперсией, равной 100. Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал (30; 80).

8.13. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X (количество сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов), равно 1 кг. Расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г с вероятностью 0,96. Определить среднее квадратическое отклонение расхода сыра на 100 бутербродов.

8.14. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10. Вероятность попадания X в интервал (10; 20) равна 0,3. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; 10).

8.15. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10, и средним квадратическим отклонением, равным 5. Найти интервал, в который попадет случайная величина X в результате испытания с вероятностью 0,9973.

8.16. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 25. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,2. Найти вероятность попадания случайной виличины X в интервал (35; 40).

8.17. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 15, и средним квадратическим отклонением, равным 2. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который попадет случайная величина X с вероятностью 0,954.

8.18. Случайная величина X распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 5 мм, и математическим ожиданием, равным 15. Найти длину интервала, в который попадет случайная величина X в результате испытания с вероятностью 0,9973.

8.19. Случайная величина X распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 5. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который попадет случайная величина X в результате испытания с вероятностью 0,9973.

8.20. Случайная величина X (ошибка измерения) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0, и средним квадратическим отклонением, равным 3. Найти вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал (–9; 9).

8.21. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны 20 и 5 соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (15; 25).

8.22. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается стандартным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Случайная величина X распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,4 мм. Найти количество стандартных шариков среди 100 изготовленных.

8.23. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

8.24. При измерении нормально распределенной случайной величины X оказалось, что ее среднее квадратическое отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 100 до 140, симметричной относительно математического ожидания, равна 0,86. Найти математическое ожидание величины X и вероятность попадания ее в интервал от 90 до 150.

8.25. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 20 мм, и математическим ожиданием, равным 0. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превысит по абсолютной величине 4 мм.

8.26. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10. Вероятность попадания X в интервал (15; 20) равна 0,2. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; 5).

8.27. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет проведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

8.28. Математическое ожидание случайной величины X и ее среднее квадратическое отклонение равны 10 и 5 соответственно. Определить, что больше: вероятность попадания величины X в интервал (5; 15) или в интервал (10; 35).

8.29. Автомат штампует детали. Контролируемая длина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятого стержня будет: а) больше 55 мм, б) меньше 55 мм.

8.30. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0, и средним квадратическим отклонением, равным 1. Определить, что больше: $P(-0{,}5 < X < -0{,}1)$ или $P(1 < X < 2)$.

Задание 9. Дана система случайных величин (X, Y).

Требуется найти следующее:

1) законы распределения составляющих дискретной двумерной случайной величины;

2) дисперсию компоненты X;

3) корреляционный момент;

4) коэффициент корреляции.

Вариант	Числовые данные			
1	$Y \backslash X$	1	3	4
	2	0,16	0,10	0,28
	3	0,14	0,20	0,12

Вариант	Числовые данные			
2	$Y \backslash X$	2	3	5
	1	0,06	0,18	0,24
	4	0,12	0,13	0,27

3	$Y \backslash X$	1	2	4
	3	0,12	0,24	0,22
	4	0,20	0,15	0,07
4	$Y \backslash X$	2	3	5
	2	0,12	0,13	0,24
	3	0,18	0,06	0,27
5	$Y \backslash X$	1	3	4
	3	0,13	0,24	0,12
	6	0,18	0,06	0,27
6	$Y \backslash X$	1	3	4
	3	0,13	0,24	0,12
	5	0,18	0,06	0,27
7	$Y \backslash X$	2	3	4
	1	0,16	0,10	0,28
	3	0,14	0,20	0,12
8	$Y \backslash X$	2	3	5
	4	0,06	0,18	0,24
	6	0,12	0,13	0,27
9	$Y \backslash X$	2	3	5
	2	0,16	0,10	0,28
	3	0,14	0,20	0,12
10	$Y \backslash X$	2	4	5
	1	0,12	0,13	0,24
	3	0,18	0,06	0,27
11	$Y \backslash X$	4	6	6
	2	0,06	0,18	0,24
	3	0,12	0,13	0,27
12	$Y \backslash X$	1	4	6
	3	0,14	0,12	0,13
	7	0,13	0,20	0,28
13	$Y \backslash X$	5	8	10
	2	0,11	0,13	0,26
	6	0,21	0,06	0,23
14	$Y \backslash X$	4	7	9
	4	0,22	0,09	0,32
	7	0,14	0,17	0,06
15	$Y \backslash X$	8	9	12
	1	0,14	0,11	0,18
	6	0,23	0,04	0,30
16	$Y \backslash X$	3	5	6
	1	0,12	0,24	0,22
	3	0,20	0,15	0,07
17	$Y \backslash X$	4	6	8
	3	0,13	0,08	0,12
	5	0,20	0,16	0,31
18	$Y \backslash X$	3	4	7
	3	0,30	0,20	0,10
	6	0,05	0,12	0,23
19	$Y \backslash X$	4	6	8
	2	0,24	0,30	0,05
	5	0,10	0,12	0,19
20	$Y \backslash X$	5	7	9
	4	0,14	0,15	0,21
	7	0,16	0,20	0,14
21	$Y \backslash X$	6	9	12
	5	0,23	0,07	0,15
	9	0,17	0,20	0,18
22	$Y \backslash X$	5	8	10
	2	0,11	0,21	0,14
	7	0,20	0,09	0,25

Окончание табл.

Вариант	Числовые данные			
23	$Y \backslash X$	4	7	9
24	$Y \backslash X$	2	6	9

	4 10	0,30 0,08	0,12 0,12	0,10 0,28
25	X / Y	3	6	8
	2 8	0,21 0,11	0,07 0,20	0,23 0,18
27	X / Y	4	5	8
	3 5	0,13 0,24	0,14 0,08	0,19 0,22
29	X / Y	1	4	8
	4 8	0,11 0,21	0,24 0,08	0,17 0,19

	5 9	0,21 0,08	0,18 0,14	0,14 0,25
26	X / Y	3	4	7
	4 8	0,15 0,21	0,23 0,09	0,15 0,17
28	X / Y	4	7	9
	2 7	0,09 0,17	0,15 0,23	0,16 0,20
30	X / Y	4	8	14
	3 5	0,12 0,23	0,13 0,12	0,20 0,20

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Вентцель, Е. С. Теория вероятностей (задачи и упражнения) / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1969.

Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998.

Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998.

Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1988.

Гурский, Е. И. Методическое пособие по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский, Т. Ю. Скобля, В. Э. Юшкевич. – Мн., 1973.

Гусак, А. А. Высшая математика. Т. 2 / А. А. Гусак. – Мн. : ТетраСистемс, 1998.

Ивашев-Мусатов, О. С. Теория вероятностей и математическая статистика / О. С. Ивашев-Мусатов. – М. : Наука, 1979.

Карасев, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика / А. И. Карасев. – М. : Статистика, 1979.

Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев, О. В. Староверов, В. Б. Турундаевский. – М. : Высш. шк., 1991.

Лихолетов, И. И. Руководство к решению задач по высшей математике с основами математической статистики и теории вероятностей / И. И. Лихолетов, И. П. Мацкевич. – Мн. : Выш. шк., 1966.

Микулик, Н. А. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике / Н. А. Микулик, Г. Н. Рейзина. – Мн. : Выш. шк., 1991.

Сборник задач по высшей математике для экономистов : учеб. пособие ; под ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА-М, 2001.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции плотности стандартного нормального распределения $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Окончание прил. 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,4999997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961		
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		

СОДЕРЖАНИЕ